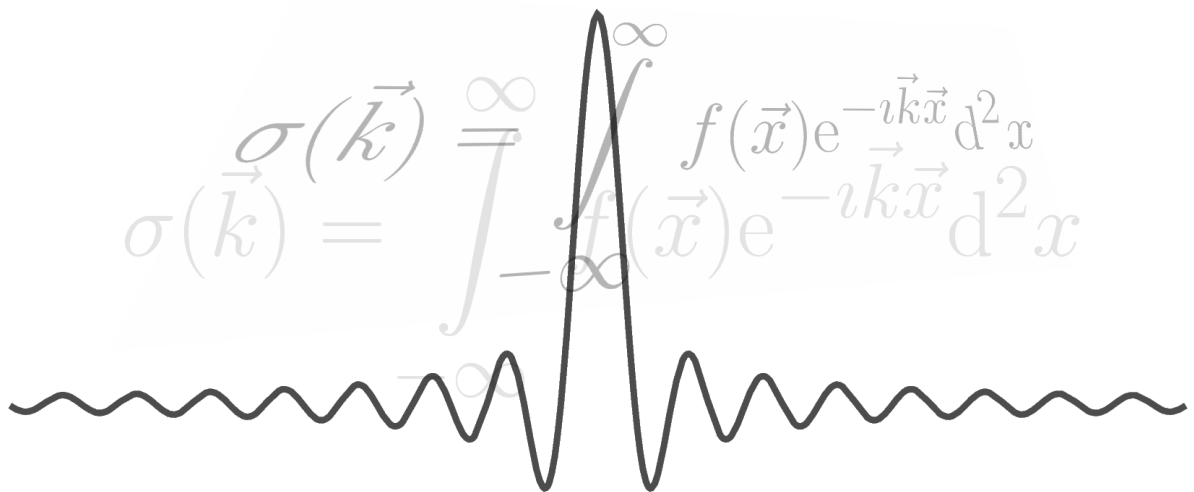


Henrik Schachner

Kleine Theorie zur Kernspintomographie

Eine Einführung für Medizophysiker, Medizintechniker
und Studierende dieser Fachrichtungen



Schachner, Henrik
Kleine Theorie zur Kernspintomographie

ISBN: 3-86541-090-1

Textsatz: L^AT_EX

Wichtiger Hinweis / Disclaimer:

Die Medizintechnik unterliegt einer rasanten Entwicklung. Der Autor hat größte Sorgfalt auf die Korrektheit der gemachten Aussagen verwandt. Da jedoch menschliche Irrtümer und Druckfehler nie völlig auszuschließen sind, wird hierfür keinerlei Gewähr übernommen. Jede/r ist aufgefordert, alle Angaben in eigener Verantwortung auf ihre Richtigkeit zu überprüfen. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Warenbezeichnungen oder Handelsnamen in diesem Skriptum berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen-Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.



<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Diese Dokument ist lizenziert unter der Creative-Commons-Lizenz
„Namensnennung 4.0 international“.

Mit diesem Skriptum wurde der Versuch unternommen, die grundlegende Theorie der Kernspintomographie kurz und knapp – und gleichzeitig fundiert – darzustellen. Es will somit einen schnellen Einstieg in die Materie ermöglichen, unter der Maßgabe, daß möglichst keine Formeln/Fakten ohne Begründung „vom Himmel fallen“, wenn sie nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

Die günstigste Leserichtung ist wohl von vorne nach hinten, wenngleich dies durch die starke Referenzierung nicht wirklich zwingend ist. Insbesondere schadet es nicht den kurzen mathematischen Anhang frühzeitig zu lesen.

Die Probleme bei der Realisierung der Kernspintomographie sind sicherlich in erster Linie technischer Natur und liegen dort in den Details. Wenn in diesem Skriptum so locker die apparatetechnischen Voraussetzungen gestreift werden, so darf man sich nicht täuschen: Der Bau eines Kernspintomographen ist eine technische Meisterleistung, die keinen Vergleich mit einer anderen Hochtechnologie zu scheuen braucht!

Aber darüber hinaus stellt die zugrundeliegende Theorie eine wirklich lohnende geistige Herausforderung dar, bei der man allein mit Papier und Bleistift relativ weit kommt.

Ganz grundsätzlich muß an solchen Stellen immer auch **Richard Stallman** (Free Software Foundation, GNU Project), **Linus Torwalds** (Linux Kernel), **Prof. Dr. Donald Knuth** (TEX, uvm.) und **den vielen anderen aus der open-source-Gemeinde** gedankt werden, ohne deren gewaltige Vorleistung das Erstellen eines solchen Dokuments wohl deutlich weniger Spaß machen würde.

Henrik Schachner, März 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Geschichtlicher Überblick	1
1.2	Synonyme / Akronyme	2
2	Physikalische Grundlagen	4
2.1	Der Kernspin im Magnetfeld	4
2.2	Die Bloch-Gleichungen	7
2.3	Spin-Statistik	11
3	Hardware und MR-Bildgebung	13
3.1	Das homogene Grundfeld	13
3.2	Die Gradienten	16
3.3	Schichtauswahl und k -Raum-Konzept	18
3.3.1	Schichtanregung	18
3.3.2	Bilddarstellung	20
4	Sequenz und Konsequenz: Bildkontraste	22
4.1	Die Gradientenecho-Sequenz	23
4.1.1	Die Wichtungsmöglichkeiten bei der Gradientenechosequenz	25
4.2	Die Spinecho-Sequenz	28
4.2.1	Die Wichtungsmöglichkeiten bei der Spinecho-Sequenz	29
4.2.2	Der Bildkontrast	31
4.3	Klassisches Modell der Relaxation	33
5	Grundlegende Eigenschaften der Methode	37
5.1	Ein bißchen Fourier-Theorie	37
5.1.1	Die Fourier-Transformation	38
5.1.2	Die Bedeutung des k -Raums	38
5.1.3	Besonderheiten bei der Datenakquirierung	40
5.1.4	Auflösung im Orts- und im k -Raum	43
5.2	Artefakte und Phänomene	45
5.2.1	Aliasing- oder Einfalt-Artefakt	46
5.2.2	Gibbs-Artefakt	46
5.2.3	Bewegungsartefakte, Flußartefakte	47
5.2.4	Chemische Verschiebung	48
5.2.5	black-boundary-Phänomen	50

5.2.6	Metall- bzw. Suszeptibilitätsartefakte	51
5.2.7	Dritter-Arm-Artefakt	51
5.2.8	Spikes	53
5.2.9	Zipper-Artefakt	54
5.2.10	ADC-Überlauf	55
5.2.11	Magic-Angle-Phänomen	55
5.2.12	Nichtlinearität der Gradienten	57
5.3	Bildqualität, Bildrauschen	58
6	Reduktion der Meßzeit, elegante Tricks, etc.	61
6.1	Multischichtmessung	61
6.2	Multiechosequenztechnik	61
6.3	3D-Sequenztechnik	63
6.4	Half-Fourier-Technik	64
6.5	Parallele Datenakquisition (PAT)	66
6.5.1	Ausfaltung im k -Raum	67
6.5.2	Ausfaltung im Bildraum	69
6.6	Fourier-Interpolation	70
6.7	Apodization-Filter	72
7	Sicherheitsaspekte	73
7.1	Risiken im statischen Magnetfeld	73
7.2	Risiken im magnetischen Wechselfeld (Gradienten)	75
7.3	Risiken im Hochfrequenzfeld	76
7.4	Sonstige Gefährdungen	76
7.4.1	Schallemission	76
7.4.2	Laservisier	76
7.4.3	Helium	77
A	Minimaldarstellung mathematischer Werkzeuge	78
A.1	Nochmals: Die Fourier-Transformation	78
A.2	Diracsche Deltafunktion	81
A.3	Faltung und Faltungssatz	82
A.4	Rechtecksfunktion: Fouriertransformierte und Bandbreite	83
A.4.1	Faltung mit sinc-Funktion	84
A.5	Bandbreite einer harmonischen Oszillation endlicher Dauer	85
A.6	Gausskurve und dessen Fouriertransformierte	86

A.6.1 Faltung mit Gausskurve	86
A.7 Gedämpfte Schwingung: Fouriertransformierte und Bandbreite	87
A.8 Heaviside-Funktion, Kausalitätsprinzip	87
B Der steady-state-Zustand der Magnetisierung	90
C Das Dipolfeld	92
D Verwendete Bezeichnungen	94
Abbildungsverzeichnis	95
Literatur	101

1 Einleitung

In der medizinischen Diagnostik gibt es eine ganze Reihe von bildgebenden Verfahren; die bekanntesten dürften sein:

- Die Standard-Röntgenaufnahme, die eine Projektion der untersuchten Körperregion liefert;
- die Computertomographie, bei der aus einzelnen Röntgenprojektionen ein Schnittbild *berechnet* wird;

Diese und weitere Verfahren haben gemeinsam, daß die dabei verwendeten Wellenlängen kleiner sind, als die Strukturen, die dargestellt werden sollen. Soweit kein weiterer „Trick“ verwendet wird, muß dies auch so sein und entspricht einer physikalischen Gesetzmäßigkeit, die formuliert ist in der *Abbildungstheorie von Ernst Abbe*.

Die Kernspintomographie dagegen verwendet elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen in der Größenordnung von 1m bis 10m, in einem Bereich des Spektrums also, der als gefahrlos bzw. alltäglich (Radiowellen) angesehen wird, insbesondere da Molekülionisierung hier nicht möglich ist. Dennoch lassen sich damit standardmäßig Auflösungen im Submillimeterbereich erreichen.

Dies ist physikalischen Effekten und trickreichen Verfahren zu verdanken, auf die im folgenden eingegangen wird.

1.1 Geschichtlicher Überblick

Hier soll die Historie der Kernspintomographie nur grob skizziert werden, um von der zeitlichen Entwicklung eine Vorstellung zu geben. Eine ausführliche Beschreibung findet sich z.B. in [1].

1924: Entdeckung der Hyperfeinaufspaltung in Atomspektren, Begriff „Kernspin“ postuliert von Wolfgang Pauli (Nobelpreis 1945);

1946: Beschreibung der magnetischen Kernspinresonanz in Flüssigkeiten und Festkörpern durch Felix Bloch und Edward M. Purcell (Nobelpreis 1952) nach Vorarbeiten von Isidor I. Rabi (Nobelpreis 1944); Anwendung zunächst in der Kernspinresonanz-Spektroskopie;

1950: Kernspinechos durch Erwin L. Hahn;

1967: erste Kernspinexperimente an lebenden Tieren durch Jasper Johns mit Blick auf medizinischen Einsatz;

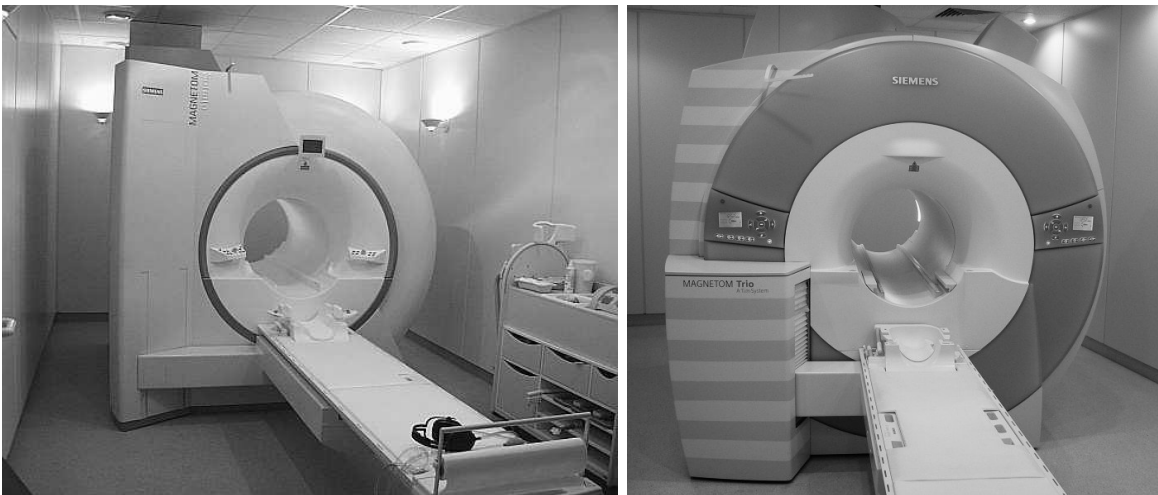
1970: Entdeckung unterschiedlicher Relaxationszeiten in gesundem und in Tumorgewebe durch Raymond Damadian;

1973: erste Kernspintomographie–Schnittbildaufnahmen durch Paul C. Lauterbur (Nobelpreis 2003) mittels einer Projektionsrekonstruktionsmethode nach Art der CT–Bildrekonstruktion (sog. „Zeugmatographie“);

1975: Bildgebung nach „moderner“ Art (mittels Fourier–Transformation) durch Richard Ernst (Nobelpreis 1991);

1976: erste MR–Bilder am lebenden Menschen durch Peter Mansfield (Nobelpreis 2003);

ab ca. 1983: klinische Anwendung mit rasanter Weiterentwicklung. Die Geräte selbst werden immer schneller und leistungsfähiger, und dabei zunehmend kompakter und gleichzeitig patientenfreundlicher (Abb. 1). Dazu werden auch offene Bauweisen realisiert (Abb. 2(a)) oder kürzere Geräte mit größeren Öffnungen (Abb. 2(b)).



(a) „Magnetom Sonata“ (Fa. Siemens) mit 1.5 Tesla Magnetfeldstärke und Hochleistungsgradienten bis 40mT/m. (b) „Magnetom Trio“ (Fa. Siemens). Hochfeldgerät mit 3.0 Tesla Magnetfeldstärke.

Abbildung 1: Beispiele für Kernspintomographen. Vom Aufbau her handelt es sich um typische Konstruktionen mit Tunnel.

1.2 Synonyme / Akronyme

Für den Begriff „**Kernspintomographie**“ gibt es eine ganze Reihe von Bezeichnungen und Abkürzungen, z.B.:

MR Magnetresonanz,

MRT Magnetresonanztomographie,

MRI Magnetic–Resonance–Imaging,

NMR Nuclear–Magnetic–Resonance,

KST Kernspintomographie.

Der Begriff „Tomographie“ selbst leitet sich ab von den altgriechischen Wörtern

$\tau\acute{o}\mu\omicron\varsigma$ (sprich: „tomos“) das Geschnittene,
 $\gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\epsilon\iota\nu$ (sprich: „graphein“) schreiben,

und bedeutet also soviel wie „Schnittbildaufzeichnung“.

Generell gibt es in der Kernspintomographie bzgl. der einzelnen Techniken eine fast unüberschaubare Menge von Akronymen und Kürzeln, die zudem noch abhängig vom jeweiligen Hersteller sind; allein dafür gibt es eigene Veröffentlichungen (siehe z.B. [2]). Die Verwendung von klingenden Akronymen ist auf diesem Gebiet sozusagen gute Tradition.



- (a) „Magnetom Open Viva“ (Fa. Siemens). Niedrigfeldgerät (0.2 Tesla) mit Elektromagnet.
- (b) „Magnetom Espree“ (Fa. Siemens). Hochfeldgerät mit 1.5 Tesla Magnetfeldstärke – trotz einer geringen Tunnellänge (125cm) und eines großzügigen Tunneldurchmessers (70cm).

Abbildung 2: Beispiele für „offenere“ Bauarten von Kernspintomographen – bei denen allerdings technische Kompromisse eingegangen werden müssen.

2 Physikalische Grundlagen

Zum Überblick: Im Folgenden wird also zunächst mit Hilfe der Quantenmechanik gezeigt, wie sich der Erwartungswert eines zu einem Magnetfeld verkippten Spins verhält. Aus der Summe dieser Erwartungswerte ergibt sich die Gesamtmagnetisierung; eine Beschreibung deren zeitlichen Verhaltens – unter zusätzlichem Einfluß von elektromagnetischer Einstrahlung – wird schließlich durch die phänomenologischen Bloch–Gleichungen geliefert.

Atomkerne mit einer ungeraden Anzahl von Nukleonen besitzen einen sog. *Spin*, eine quantenmechanische Eigenschaft, zu der es kein klassisches (d.h. makroskopisches) Analogon gibt. Behelfsmäßig veranschaulicht wird dies typischerweise mit einer Rotation eines Teilchens um seine eigene Achse, verbunden mit einem magnetischen Moment längs dieser Achse.

In *diesem* Bild sind ein in einem äußeren Magnetfeld verkippter Spin und ein im Schwerfeld verkippter Kreisel analoge Modelle: Es tritt jeweils eine Präzessionsbewegung ein (siehe Abb. 3).

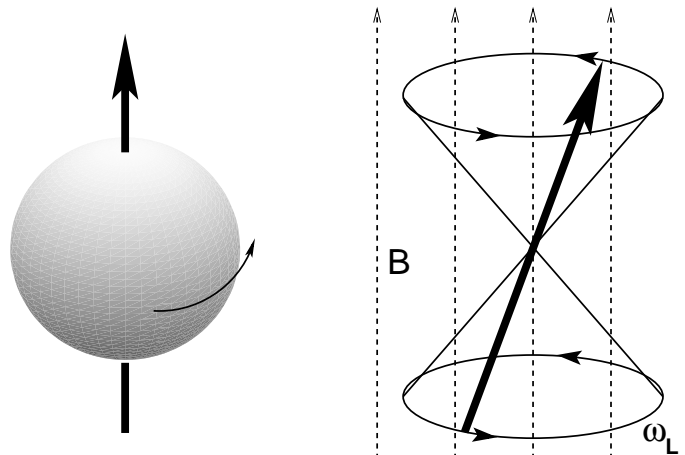


Abbildung 3: Links: Modellvorstellung des Kernspin als Kreisel. Rechts: Präzessionsbewegung eines Spins im Magnetfeld (dicker Pfeil entspricht hier dem magnetischen Moment) bzw. eines gekippten Kreisels im Schwerfeld (dicker Pfeil entspricht dann der Kreiselachse). Die Präzession erfolgt mit der sog. Larmorfrequenz ω_L .

Dies ist die physikalische Grundlage aller MR–Technik, und daß dies tatsächlich so ist, wird nun mit ein paar Formeln etwas begründet. (Wer sich damit vorläufig zufrieden gibt, kann dieses – zugegebenermaßen trockene – Kapitel auch erstmal überspringen . . .)

2.1 Der Kernspin im Magnetfeld

Für ein geladenes Teilchen gilt allgemein, daß dessen Gesamtdrehimpuls \vec{I} proportional zu seinem magnetischen Moment $\vec{\mu}$ ist:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{I}; \quad (1)$$

der Proportionalitätsfaktor γ bezeichnet das *gyromagnetische Verhältnis* und es gilt:

$$\gamma = g \frac{\mu_N}{\hbar} \quad (2)$$

mit dem sog. *Kernmagneton*

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_P} \quad (3)$$

und den Größen g : „g-Faktor“ und m_P : Protonenmasse; e : Elementarladung; \hbar : Plancksche Konstante.

Bringt man ein solches mit einem magnetischen Moment behaftetes Teilchen in ein äußeres Magnetfeld \vec{B} , dann lautet die Energiefunktion (der Hamiltonian) H :

$$H = -\vec{\mu}\vec{B} = -\gamma\vec{I}\vec{B}, \quad (4)$$

oder, wenn das B -Feld nur in z -Richtung zeigt ($\vec{B} = B\vec{e}_z$):

$$H = -\gamma I_z B_z. \quad (5)$$

Da es sich um ein mikroskopisches System handelt, muß man – zumindest zunächst – quantenmechanisch rechnen. Der Zeitentwicklungsoperator U hat die Form eines Drehoperators

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha I_z} \quad (6)$$

mit einem zeitabhängigen Drehwinkel

$$\alpha = -\gamma B_z t = \omega_L t, \quad (7)$$

so daß man also eine Drehfrequenz, die sog. *Larmor-Winkelgeschwindigkeit*, ω_L angeben kann:

$$\omega_L = -\gamma B_z. \quad (8)$$

Bei der Kernspintomographie werden hauptsächlich Wasserstoffkerne, d.h. freie Protonen zur Darstellung verwendet; damit reduziert sich der Gesamtdrehimpuls allein auf den Protonenspin $I_z = S_z$ und es gilt (experimentell): $g = g_S \approx 5.59$. (Der Index „S“ steht für „Spin“.)

Somit findet man das für die Kernspintomographie wichtige Verhältnis zwischen Magnetfeldstärke und Larmor-Winkelgeschwindigkeit:

$$\gamma = g_S \frac{e}{2m_P} \approx 2.677 \cdot 10^8 \frac{\text{C}}{\text{kg}}, \quad (9)$$

oder – was in der Praxis brauchbarer ist – es ergibt sich die Relation von 21MHz Resonanzfrequenz pro halben Tesla Magnetfeldstärke (bei Kernspintomographen oft ein ganzzahliges Vielfaches davon).

Man kann nun die quantenmechanische Dynamik von solchen magnetischen Momenten in einem äußeren Magnetfeld betrachten. Als „Testzustand“, d.h. als Startzustand

zur Zeit $t = 0$, bietet sich eine Linearkombination der Spin-Zustände „Spin up“ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und „Spin down“ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an, ausgedrückt als *Spinoren*:

$$|\psi(t=0)\rangle \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Mit $I_z = \pm\hbar/2$ (Spin) folgt aus Gleichung (6):

$$U = e^{\mp i\frac{1}{2}\omega_L t} \quad (11)$$

und mit den Spinoperatoren

$$S_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2} \sigma_{x,y,z} \quad (\sigma_{x,y,z} : \text{Pauli-Spinmatrizen}) \quad (12)$$

ergibt sich für die zeitliche Entwicklung des quantenmechanischen Erwartungswertes des Spinvektors:

$$\begin{aligned} \langle S_x(t) \rangle &= \langle \psi(0) | U^\dagger S_x U | \psi(0) \rangle = \\ &= \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{+i\frac{1}{2}\omega_L t} & e^{-i\frac{1}{2}\omega_L t} \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\omega_L t} \\ e^{+i\frac{1}{2}\omega_L t} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2} (e^{+i\omega_L t} + e^{-i\omega_L t}) = \frac{\hbar}{2} \cos(\omega_L t); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{analog: } \langle S_y(t) \rangle = \langle \psi(0) | U^\dagger S_y U | \psi(0) \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin(\omega_L t);$$

$$\langle S_z(t) \rangle = \langle \psi(0) | U^\dagger S_z U | \psi(0) \rangle = 0;$$

Wie man sieht, entspricht der Erwartungswert des Startzustandes ($t = 0$) einem Vektor, der in x-Richtung zeigt und dann folglich in der xy-Ebene mit der Larmor-Frequenz ω_L rotiert. Der Erwartungswert des magnetischen Moments verhält sich also genau so, wie ein gekippter mechanischer Kreisel im Schwerfeld: Es ergibt sich eine Präzessionsbewegung (vgl. Abb. 3).

Es macht deshalb durchaus Sinn, sich dieser *klassischen Vorstellung* zu bedienen, wenn es um das Kollektiv der magnetischen Momente (Spins) geht. Dies ist hier das wesentliche Ergebnis.

Diese Präzessionsbewegung stellt natürlich keinen stabilen Zustand dar: Rotierende magnetische Momente strahlen elektromagnetische Wellen ab, verlieren also ihre Rotationsenergie und richten sich schließlich nach dem äußeren Feld aus; außerdem werden die Spins untereinander ihre Phasenkohärenz verlieren (z.B. durch gegenseitige Wechselwirkung), d.h. sie werden mit der Zeit außer Tritt geraten. Es sind also noch weitere Terme nötig, die diese Relaxation des Systems hin zu einem (statischen) Gleichgewichtszustand beschreiben; eine *phänomenologische* Beschreibung dieser Erscheinung leisten die Bloch-Gleichungen.

2.2 Die Bloch–Gleichungen

Eine schwerpunktmäßige Ausrichtung durch das Kollektiv der Spins stellt eine Magnetisierung des Körpers dar (siehe z.B. [3]); diese Magnetisierung \vec{M} setzt sich zusammen aus den einzelnen magnetischen Momenten $\vec{\mu}_n$:

$$\vec{M} = \sum_n \vec{\mu}_n. \quad (14)$$

Wie schon angedeutet, gibt es für diese (Netto-)Magnetisierung einen statischen Gleichgewichtszustand, nämlich wenn sich die Magnetisierung im äußeren Magnetfeld $B\vec{e}_z$ ausgerichtet hat. Dieser Gleichgewichtszustand läßt sich darstellen als

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Ein Magnetisierungsvektor, der nicht in diesem Zustand ist, präzediert, und sendet also ein elektromagnetisches Signal aus, das mit der Zeit immer schwächer wird. Dafür gibt es zwei Ursachen:

- die „Drehung“ der Magnetisierung zurück in die z -Richtung, die sog. $T1$ -Relaxation (Abb. 4);
- die relative Dephasierung des gesamten Kollektivs der angeregten Spins, die sog. $T2$ -Relaxation (Abb. 5);

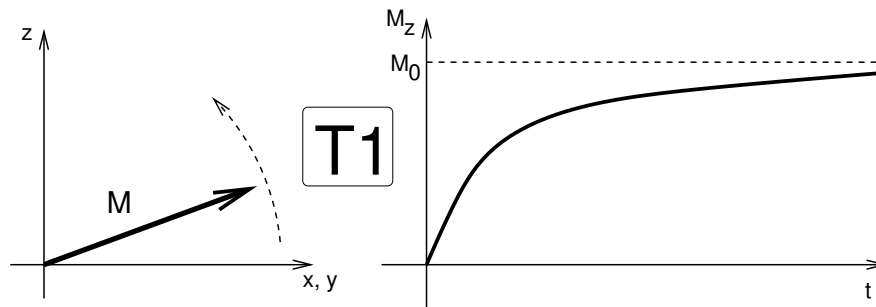


Abbildung 4: $T1$ -Relaxation. Die Magnetisierung orientiert sich zunehmend wieder in Richtung zum Hauptfeld in z -Richtung.

Man nimmt also an, daß die Relaxation sich näherungsweise beschreiben läßt mit den folgenden *Relaxationstermen*:

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T1}, \quad (16)$$

$$\frac{dM_{x,y}}{dt} = -\frac{M_{x,y}}{T2}. \quad (17)$$

Dieser Ansatz ist im Grunde nicht tief Sinnig; er bringt lediglich die Annahme zum Ausdruck, daß die Geschwindigkeit der Veränderung hin zu einem Gleichgewichtszustand in

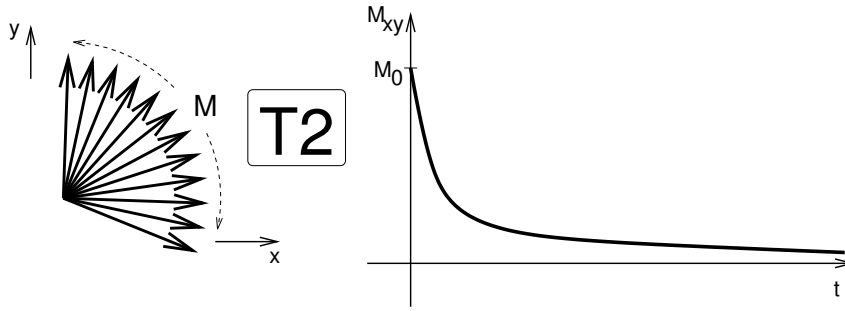


Abbildung 5: T_2 -Relaxation. Zunehmende gegenseitige Dephasierung der Spins, bzw. der Magnetisierung.

irgend einer Weise von der Entfernung davon abhängt. Diese Abhängigkeit wird nur in erster Ordnung angesetzt, da sich dann lösbare lineare Differentialgleichungen ergeben – ein häufig zu findendes Vorgehen. Allerdings führt dieser Ansatz zu wichtigen Implikationen:

- Die Gleichung (16) beschreibt also die *longitudinale* oder *Spin-Gitter-Relaxation* mit der Zeitkonstanten T_1 ,
- die Gleichung (17) beschreibt die *transversale* oder *Spin-Spin-Relaxation* mit der Zeitkonstanten T_2 .

Die Größen T_1 und T_2 sind gewebeabhängig und werden sich als kontrastbestimmend herausstellen.

Zur gezielten Auslenkung wird ein zirkular-polarisiertes HF-Feld mit der Frequenz ω_1 und der Amplitude B_1 eingestrahlt, so daß das Gesamt-B-Feld zuzüglich des Grundmagnetfeldes B_0 die Form hat

$$\vec{B}(t) = \begin{pmatrix} B_1 \cos(\omega_1 t) \\ B_1 \sin(\omega_1 t) \\ B_0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Grundsätzlich bewirkt ein äußeres Magnetfeld \vec{B} ein Drehmoment \vec{T} auf den Vektor der Magnetisierung

$$\vec{T} = \vec{M} \times \vec{B}, \quad (19)$$

das prinzipiell mit einer Änderung des Gesamtdrehimpulses \vec{I} verknüpft ist:

$$\vec{T} = \frac{d}{dt} \vec{I}. \quad (20)$$

Dies wäre im Grunde die Situation wie bei einer Kompaßnadel. Hier kommt aber noch hinzu, daß der Drehimpuls selbst wieder von der Magnetisierung abhängt (vgl. Gln. (1) und (14)):

$$\vec{M} = \sum_n \vec{\mu}_n = \gamma \sum_n \vec{I}_n = \gamma \vec{I}. \quad (21)$$

Dies eingesetzt in Gl. (19) liefert schließlich

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = \gamma (\vec{M} \times \vec{B}) = \vec{\omega} \times \vec{M}, \quad (22)$$

was eine Drehung von \vec{M} (mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = -\gamma\vec{B}$) bedeutet. Natürlich handelt es sich hier um die analoge Kreiselpräzession wie beim mikroskopischen Erwartungswert nach Gl. (13).

Gl. (22) ausgeschrieben – und unter Einbeziehung der Relaxationsterme (16)(17) – liefert die *Bloch–Gleichungen* (im Laborsystem):

$$\frac{dM_{x,y}}{dt} = \gamma(\vec{M} \times \vec{B})_{x,y} - \frac{M_{x,y}}{T_2}, \quad (23)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma(\vec{M} \times \vec{B})_z + \frac{M_0 - M_z}{T_1}. \quad (24)$$

Hier ist es nun sinnvoll, in ein *mitrotierendes Koordinatensystem* überzugehen. Allgemein gilt für die Transformation eines beliebigen Vektors \vec{V} in ein Koordinatensystem, das mit einer Kreisfrequenz ω_{rot} um den Ursprung rotiert:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{V}\right)_{\text{rot}} = \left(\frac{d}{dt}\vec{V}\right)_{\text{fest}} - (\vec{\omega}_{\text{rot}} \times \vec{V}). \quad (25)$$

Günstigerweise soll dieses neue Koordinatensystem synchron zum HF–Feld rotieren, also

$$\vec{\omega}_{\text{rot}} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix}; \quad (26)$$

dann bekommt das Gesamt–B–Feld (vgl. Gl. (18)) die einfache Form

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Die Bloch–Gleichungen im rotierenden Koordinatensystem (bezeichnet mit $\check{}$) lauten nun (mit $\omega_{L,0} = -\gamma B_0$, $\omega_{L,1} = -\gamma B_1$ ($\neq \omega_1!$)):

$$\frac{d}{dt}\check{M}_x = (\omega_1 - \omega_{L,0})\check{M}_y - \frac{\check{M}_x}{T_2}; \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt}\check{M}_y = -(\omega_1 - \omega_{L,0})\check{M}_x - \omega_{L,1}\check{M}_z - \frac{\check{M}_y}{T_2}; \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt}\check{M}_z = \omega_{L,1}\check{M}_y + \frac{\check{M}_0 - \check{M}_z}{T_1}. \quad (30)$$

Wird genau mit der Resonanzfrequenz eingestrahlt, d.h. $\omega_1 = \omega_{L,0}$, vereinfacht sich dieses Gleichungssystem zu

$$\frac{d}{dt}\check{M}_x = -\frac{\check{M}_x}{T_2}; \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt}\check{M}_y = -\omega_{L,1}\check{M}_z - \frac{\check{M}_y}{T_2}; \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt}\check{M}_z = \omega_{L,1}\check{M}_y + \frac{\check{M}_0 - \check{M}_z}{T_1}. \quad (33)$$

Das durch das HF-Feld verursachte Verhalten läßt sich nun ersehen: Ist die Amplitude der Einstrahlung hinreichend groß, d.h. $\omega_{L,1} \gg 1/T_1$ und $\omega_{L,1} \gg 1/T_2$, dann können die Relaxationsterme vernachlässigt werden und man erhält

$$\frac{d}{dt}\check{M}_x = 0; \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt}\check{M}_y = -\omega_{L,1}\check{M}_z; \quad (35)$$

$$\frac{d}{dt}\check{M}_z = \omega_{L,1}\check{M}_y. \quad (36)$$

Formal bedeutet dies eine Drehung um die Achse \check{M}_x ; im Laborsystem, d.h. nicht mitrotierend betrachtet, kippt der Magnetisierungsvektor aus der $+z$ -Richtung in die Gegenrichtung, während er eine Präzessionsbewegung ausführt. Versinnbildlicht werden kann diese Dynamik durch eine Kurve, wie sie in Abb. 6 gezeigt ist. Insbesondere wird deutlich, daß

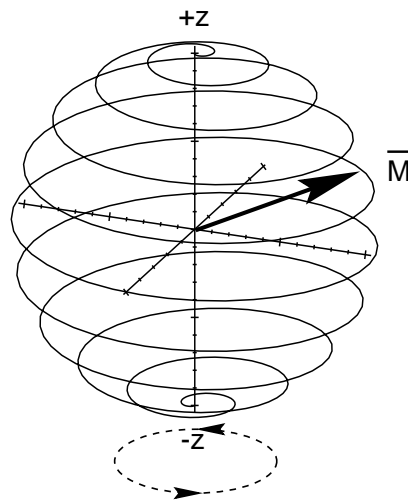


Abbildung 6: Modellhafte Darstellung der kontrollierten Auslenkung des Magnetisierungsvektors \vec{M} ; im Resonanzfall bewegt sich die Spitze des Magnetisierungsvektors für eine gewisse Strecke längs der spiralförmigen Kurve aus der $+z$ -Richtung in die $-z$ -Richtung (senkrechte Achse). Die Länge dieser Strecke (Zeitdauer des Pulses) und die Ganghöhe der Spirale (Stärke des Pulses) bestimmen die gegen die z -Achse erzielte Auslenkung, den sog. „Flip-Winkel“.

sich die Möglichkeit bietet, die Auslenkung (d.h. die Verkippung) der Magnetisierung frei zu wählen, also bestimmte „Flip-Winkel“ einzustellen, wenn mit der Resonanzfrequenz einer bestimmten Intensität und Dauer eingestrahlt wird.

Nach Beendigung der Einstrahlung ($\omega_{L,1} = 0$), d.h. bei einem sich anschließend selbst überlassenen System, bleiben in Gln. (31ff.) nur die Relaxationsterme übrig, was zu exponentiellen Lösungen führt (im mitrotierenden System!):

$$\frac{d}{dt}\check{M}_x = -\frac{\check{M}_x}{T_2}; \quad \Rightarrow \quad \check{M}_x \sim \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right); \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt}\check{M}_y = -\frac{\check{M}_y}{T_2}; \quad \Rightarrow \quad \check{M}_y \sim \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right); \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt}\check{M}_z = +\frac{\check{M}_0 - \check{M}_z}{T_1}; \quad \Rightarrow \quad \check{M}_z - \check{M}_0 \sim \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right). \quad (39)$$

Im Laborsystem kann das Relaxationsverhalten der Magnetisierung veranschaulicht werden in etwa durch eine Kurve wie in Abb. 7 gezeigt. Der Verlauf gestaltet sich tatsächlich relativ flach, wie in der Graphik angedeutet, da T_2 deutlich kleiner ist als T_1 (vgl. Tabelle auf Seite 33).

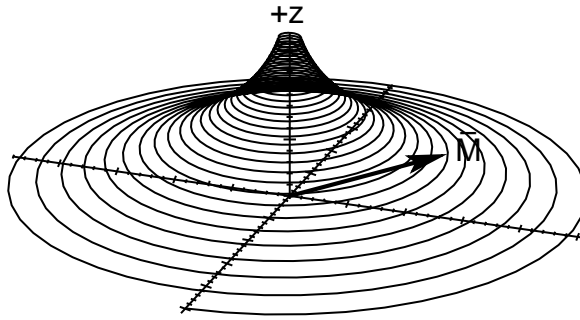


Abbildung 7: Modellhafte Darstellung der Relaxation des Magnetisierungsvektors \vec{M} .

2.3 Spin-Statistik

Da die beschriebenen Manipulationen an den Spins nur mit sehr kleinen Energiebeträgen zu tun haben und gleichzeitig eine ständige thermische Störung vorliegt, ist es sinnvoll sich klarzumachen, welcher Anteil der Spins überhaupt zum Nettoeffekt beiträgt.

Quantenmechanisch gibt es als Eigenzustand für einen Spin im Feld zwei mögliche Orientierungen: Ausrichtung *in* Feldrichtung und Ausrichtung *gegen* die Feldrichtung (siehe Abb. 8).

Mit Blick auf die Gleichungen (5) und (8) folgen (mit $I_z = \pm\hbar/2$) sofort die zugehörigen Energieeigenwerte:

$$E_{\pm} := \pm\frac{1}{2}\hbar\omega_L =: \pm E. \quad (40)$$

Die Wahrscheinlichkeit p für einen solchen Zustand kann durch einen Boltzmannfaktor ausgedrückt werden:

$$p_{\pm} \sim e^{-\beta E_{\pm}}. \quad (41)$$

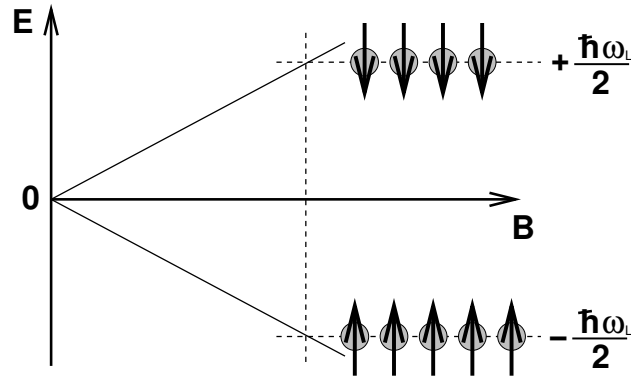


Abbildung 8: Niveaufspaltung der Spinzustände im Magnetfeld.

Nimmt man als Größenordnung für die Temperatur $T = 310\text{K}$ (Mensch) und für B einige Tesla, dann folgt

$$\beta^{-1} = k_B T \gg E. \quad (42)$$

Damit kann der Boltzmannfaktor genähert werden als

$$p_{\pm} \sim (1 - \beta E_{\pm}). \quad (43)$$

Die anteilmäßige Beteiligung an der Nettomagnetisierung – die Differenz der Wahrscheinlichkeiten – kann nun in einer einfachen Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} \frac{p_- - p_+}{p_- + p_+} &= \frac{(1 + \beta E) - (1 - \beta E)}{(1 + \beta E) + (1 - \beta E)} = \\ &= \beta E = \frac{\hbar g_s e}{2k_B T m_P} B \approx 6.6 \cdot 10^{-6} B \left[\frac{\text{As}^2}{\text{kg}} = \frac{1}{\text{T}} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Bei einer Magnetfeldstärke von einem Tesla sind also von einer Million Spins fast alle *gegengleich* ausgerichtet, so daß deren Beiträge sich gegenseitig aufheben. Nur gewissermaßen eine handvoll davon sind überzählig im energetisch günstigeren Zustand und sorgen für die Nettomagnetisierung. Dies ist auch der Grund dafür, warum das MR-Signal so schwach ist.

Außerdem findet man, daß die Nettomagnetisierung proportional zur Magnetfeldstärke ist. Dies ist vor allem bedeutsam für die Bildqualität (siehe Kap. 5.3).

3 Hardware und MR–Bildgebung

In diesem Kapitel wird nun auf die grundsätzlichen Fragen eingegangen: *Was* macht man sichtbar, und *wie* macht man es sichtbar?

Für die MR–Bildgebung sind eine ganze Reihe von schwierigen technischen Voraussetzungen zu erfüllen:

- Ein Grundmagnetfeld (bezeichnet mit B_0), mit den Eigenschaften
 - extrem stark (in der Größenordnung 1 Tesla),
 - extrem homogen;
- lineare Magnetfeld–Gradienten (in der Größenordnung 10^{-2} Tesla/m, siehe unten);
- ein leistungsfähiges HF–Sende- und Empfangssystem;
- hohe Rechnerleistung.

3.1 Das homogene Grundfeld

Ein homogenes Grundfeld bildet die Basisvoraussetzung für die streng definierten „magnetischen Verhältnisse“, die man zur Bildgebung benötigt.

Wie bekannt, werden die grundlegenden Eigenschaften eines stationären Magnetfeldes durch die Maxwell–Gleichungen beschrieben. Für ein Magnetfeld gilt grundsätzlich

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0, \quad (45)$$

was anschaulich dessen prinzipielle Freiheit von Feldquellen beschreibt. Liegt ein stationäres Magnetfeld (in einem Raumbereich ohne Ladungsfluß und Verschiebungsstrom) vor, gilt zudem:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}. \quad (46)$$

Die Anwendung des Rotationsoperators ($\vec{\nabla} \times$) auf beide Seiten von Gl. (46) liefert

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \vec{B}; \quad (47)$$

wegen Gl. (45) und $\vec{\nabla} \vec{\nabla} \equiv \Delta$ (Laplace–Operator) ergibt sich daraus die fundamentale Gleichung

$$\Delta \vec{B} = \vec{0} \quad (\text{Laplace–Differentialgleichung}). \quad (48)$$

In der MR–Theorie hat die z –Komponente eine Sonderbedeutung: Gemäß der üblichen Konvention wird die Richtung des homogenen Grundfeldes als z –Richtung bezeichnet, und wegen dessen Größe genügt es, nur diese Komponente zu betrachten. Der Laplace–Operator wirkt auf jede Vektorkomponente einzeln, deshalb kann die B_z –Komponente auch alleine betrachtet werden:

$$\Delta B_z = 0. \quad (49)$$

Formuliert man die Laplace-Dgl. als $\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0$, erschließt sich deren physikalische Bedeutung: Es handelt sich um die Bestimmung einer Potentials U , dessen korrespondierendes Feld quellenfrei ist.

Funktionen, die der Laplace-Dgl. gehorchen, bezeichnet man als *harmonisch*. Harmonische Funktionen besitzen eine Reihe interessanter Eigenschaften. Z.B. können sich Extrema niemals im Inneren eines beliebigen Gebietes (frei von Singularitäten) befinden. Diese Erkenntnis folgt direkt aus der Laplace-Dgl.:

$$0 = \Delta B_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} B_z; \quad (50)$$

zweite Ableitungen beschreiben die Krümmung der Funktion; für ein Extremum müssen diese Krümmungen nach den verschiedenen Komponenten jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen („+“ für Minimum, „-“ für Maximum), was die Laplace-Dgl. aber gerade verbietet.

Eine andere wichtige Eigenschaft harmonischer Funktionen ist deren Entwickelbarkeit in sog. *Kugelfunktionen*, da Kugelfunktionen selbst einzelne Lösungen der Laplace-Dgl. sind. Grundsätzlich geht man dazu von kartesischen Koordinaten (x, y, z) in Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) über. Die Prozedur zum Auffinden der Lösungen in Form der Kugelfunktionen geschieht im Wesentlichen durch Separation der Variablen und ist in der Literatur (z.B. [4]) hinreichend beschrieben.

Das Ergebnis jedenfalls liefert die grundsätzliche Darstellbarkeit von B_z als Summe von Kugelfunktionen der Form

$$B_z = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \vartheta) \cdot r^l \cdot (a_{l,m} \cos(m\varphi) + b_{l,m} \sin(m\varphi)); \quad (51)$$

zu jedem Wert von l gehören also $2l + 1$ Summanden. Dabei bezeichnen die $P_l^m(z)$ die *zugeordneten Legendre-Polynome* (z.B. [5]), die u.a. berechnet werden können mit

$$P_l^m(z) = \frac{(z^2 - 1)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}} (z^2 - 1)^l; \quad (52)$$

(gebildet aus Kombination von Formel für zugeordnete Legendre-Polynome mit „Formel von Rodrigues“.)

Generell sind bei solchen Zerlegungen die Terme niedrigster Ordnung die wichtigsten; in unserem Fall lassen sie sich auch leicht interpretieren:

l	m	P_l^m	zugehöriger Term	Interpretation
0	0	$P_0^0(\cos \vartheta) = 1$	$a_{0,0}$	= const. = B_0
1	0	$P_1^0(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$	$a_{1,0} r \cos \vartheta$	= $a_{1,0} z$
1	1	$P_1^1(\cos \vartheta) = \sin \vartheta$	$a_{1,1} r \sin \vartheta \cos \varphi + b_{1,1} r \sin \vartheta \sin \varphi$	= $a_{1,1} x + b_{1,1} y$

Der konstante Term $a_{0,0}$ beschreibt also direkt das Grundfeld; die Terme erster Ordnung ($l = 1$) repräsentieren die linearen Gradienten (siehe Kap. 3.2): $a_{1,0}$ als Koeffizient

für den z -Gradienten, $a_{1,1}$ bzw. $b_{1,1}$ für den x -Gradienten bzw. y -Gradienten. Die Gradientenspulen lassen sich also auch als Shim-Spulen nutzen (siehe unten).

Um einen allgemeinen Eindruck von den beteiligten Funktionen zu bekommen, sind in Abb. 9 die Beträge der Winkelanteile von einzelnen Termen niedriger Ordnung dargestellt. (Diese Winkelanteile sind bekannt als reellwertige Linearkombinationen der Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\varphi, \vartheta)$.)

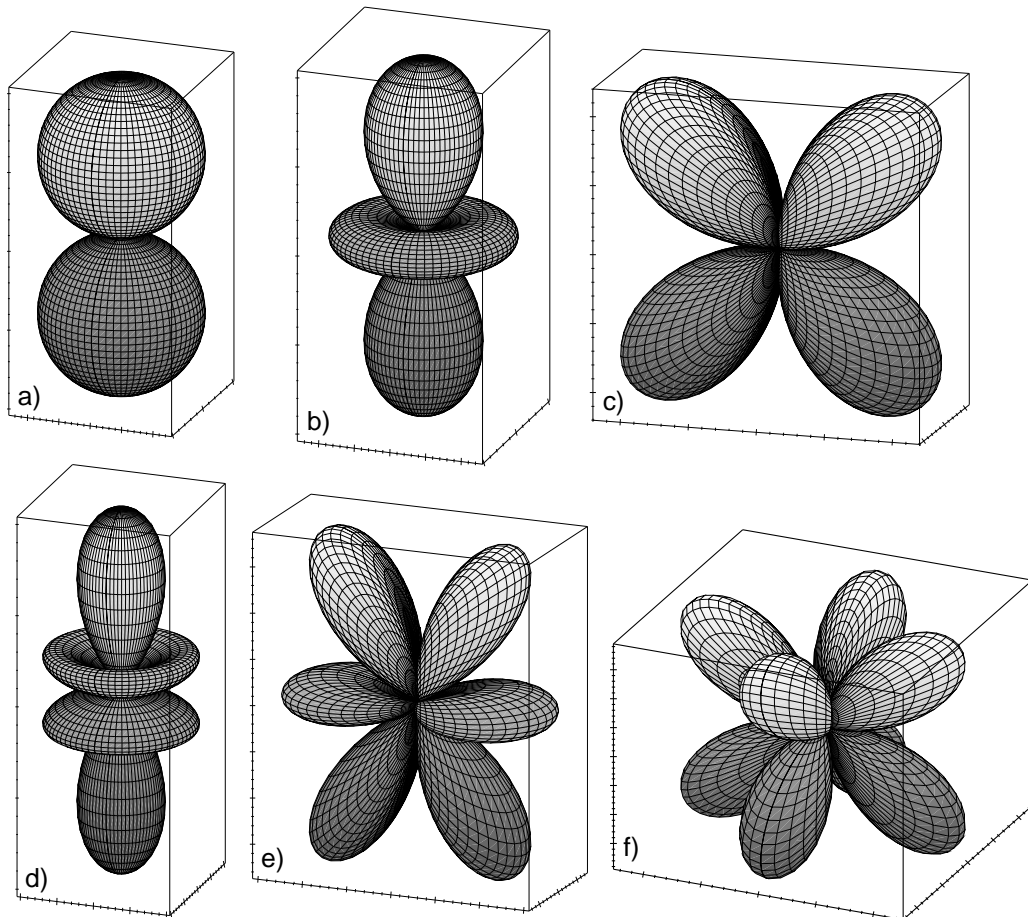


Abbildung 9: Die Beträge der Winkelanteile einiger Terme der Gleichung (51), radial angetragen: a) $P_1^0(\cos \vartheta)$, b) $P_2^0(\cos \vartheta)$, c) $P_2^1(\cos \vartheta) \cos \varphi$, d) $P_3^0(\cos \vartheta)$, e) $P_3^1(\cos \vartheta) \cos \varphi$ f) $P_3^2(\cos \vartheta) \cos 2\varphi$.

Relevant wird dieses Konzept der Feldzerlegung in Terme bekannter Form beim sog. *Shimmen*, d.h. bei der Herstellung der geforderten Homogenität des Feldes in einem bestimmten Raumbereich. Bei diesem Raumbereich handelt es sich konkret um das Innere einer gedachten Kugel; diese Kugel ist zentriert um die Magnetfeldmitte, dem sog. Isozentrum, und hat typischerweise einen Durchmesser von 50cm. (Die Größe dieses Durchmessers bestimmt auch den maximalen Bildbereich, der in einer einzelnen MR-Messung erfasst werden kann.) Beim Shimmen wird die Feldstärke an diskreten Punkten auf dieser Kugelfläche explizit gemessen und daraus (bis zu einer gewissen Ordnung) die Koeffizienten $(a_{l,m}, b_{l,m})$ von Gleichung (51) berechnet. Eine Abweichung von der Homogenität ist dann in geschlossener Form bekannt und läßt sich so systematisch ausgleichen.

Dies kann entweder passiv mit der Einbringung von sog. Shim-Blechen, oder aktiv mit der Zuschaltung von Shim-Spulen geschehen. Auf diese Weise gelingt es, die Inhomogenität auf unter 5ppm zu reduzieren. Mit obiger Erkenntnis, daß im Inneren dieser Kugel keine Extrema auftreten dürfen, ist ferner evident, daß sich die größten Abweichungen von der Homogenität eben nur am Rand der Kugel befinden können.

Geht man von einem idealisierten System aus, dann läßt sich durch Symmetrieüberlegungen die Gleichung (51) drastisch vereinfachen: Bei der typischen Tunnelbauweise eines Tomographen (Abb. 1) liegt Rotationssymmetrie bzgl. der Tunnelachse vor, d.h. jede φ -Abhängigkeit muß verschwinden; in Gleichung (51) hat das den Wegfall aller Terme mit $m \neq 0$ zur Folge. Weiterhin gilt Spiegelsymmetrie bzgl. der Ebene, die senkrecht zur Achse durch das Isocenter verläuft; deshalb müssen zusätzlich alle in z -Richtung antisymmetrischen Terme (also $P_l^0(\cos \vartheta) \stackrel{!}{=} P_l^0(\cos(\pi - \vartheta))$) bzw. $P_l^0(z) \stackrel{!}{=} P_l^0(-z)$, d.h. die, mit l ungerade) verschwinden. Gleichung (51) vereinfacht sich dann zu

$$B_z = B_0 + a_{2,0}P_2^0(\cos \vartheta)r^2 + a_{4,0}P_4^0(\cos \vartheta)r^4 + a_{6,0}P_6^0(\cos \vartheta)r^6 + \dots \quad (53)$$

Gelingt es also durch geschicktes Spulen-Design z.B. wenigstens die ersten fünf Terme in Gleichung (53) zu eliminieren, dann kann sich ein erster Störterm frühestens in der Ordnung r^{12} bemerkbar machen [6].

Werden für spezielle MR-Messungen besonders hohe Anforderungen an die Homogenität gestellt (z.B. bei MR-Spektroskopie oder bei spektraler Fettsättigung), ist ein individuelles, patientenabhängiges Shimmen notwendig. Dies geschieht ebenfalls mit Hilfe aktiver Shim-Spulen, die – zumindest in niedriger Ordnung – die Abweichung von der Homogenität mit umgekehrten Vorzeichen nachbilden und so kompensieren. Manche Geräte zeigen die zu den Kugelfunktionstermen gehörenden Koeffizienten sogar explizit an und erlauben Eingaben von Hand. Obige Betrachtungen sind also nicht soweit von der täglichen Routine entfernt.

3.2 Die Gradienten

Die Ortsauflösung bei der MR-Bildgebung erreicht man durch Schaffung einer expliziten Ortsabhängigkeit der Magnetfeldstärke. Dies wird realisiert durch definierte Feldgradienten.

Dieser wichtige und häufig verwendete Begriff des „Magnetfeld-Gradienten“ selbst kann etwas irreführend sein; da ein Magnetfeld als Vektorfeld dargestellt werden muß, ist darauf natürlich ein Gradient im mathematischen Sinne nicht definiert.

Wie bereits oben beschrieben, ist aber durch die hohe Homogenität des Grundfeldes im nutzbaren Volumenbereich nur eine einzige Komponente vorherrschend. Diese Komponente des B-Feldes wird üblicherweise mit B_z bezeichnet, und wenn von „Feldgradienten“ die Rede ist, ist damit immer der Gradient des *skalaren* Feldes B_z , also $\vec{\nabla}B_z$ gemeint.

Abkürzend soll deshalb hier immer geschrieben werden:

$$\vec{\nabla} B_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Ein MR–Tomograph ist nun mit drei sog. „Gradientenspulen“ ausgestattet; das sind spezielle Spulen, mit denen sich Feldänderungen in genau dieser Form erzeugen lassen. In den Abbn. 10 und 11 sind Prinzipskizzen dieser Gradientenspulen gezeigt. Dabei gibt es für jede kartesische Raumkomponente eine solche Spule, so daß sich in der Summe eine Feldänderung – ein „Gradient“ – beliebiger Orientierung realisieren läßt.

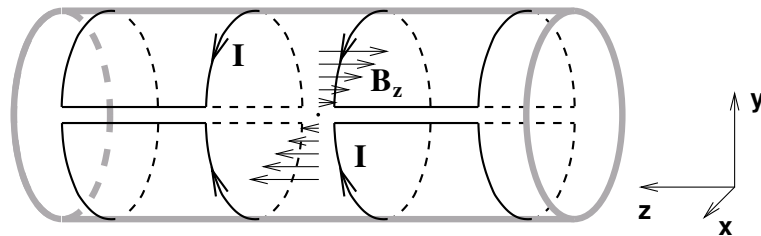


Abbildung 10: Schematische Darstellung des MR–Tunnels mit der Stromrichtung der Gradientenspulen für den y –Gradienten. Das Prinzip besteht darin, daß der Stromfluß zu beiden Seiten des Tunnels in die gleiche Richtung zeigt. Für den x –Gradienten ist die Anordnung um 90° gedreht.

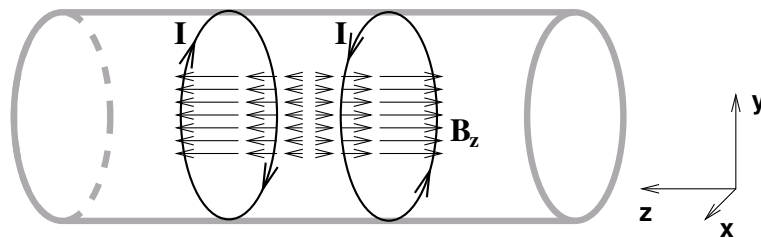


Abbildung 11: Schematische Darstellung des MR–Tunnels mit der Stromrichtung der Gradientenspulen für den z –Gradienten.

Die wichtigste Eigenschaft der durch die Gradientenspulen erzeugten Feldänderungen ist deren *Linearität*. Mit dem homogenen Grundfeld B_0 und dieser linearen Änderung kann das Feld in erster Ordnung *exakt* (zumindest theoretisch) dargestellt werden:

$$B = B_0 + \vec{G} \cdot \vec{r} \quad (+0). \quad (55)$$

Die möglichst genaue Erfüllung dieser Eigenschaft ist für die Bildgebung absolut essentiell. Man kann sich vorstellen, daß die Herstellung solcher Gradientenspulen entsprechend kompliziert und aufwendig ist. Die Linearität ist natürlich schon die Voraussetzung, daß

sich die Wirkung der drei Gradientenspulen überhaupt zu einem beliebig orientierten linearen Gradienten kombinieren lassen.

Allerdings werden durch diese Gradientenspulen natürlich auch andere Feldkomponenten erzeugt; dies muß schon aus theoretischen Gründen so sein, da nach Maxwell gilt (vgl. Gl. (45))

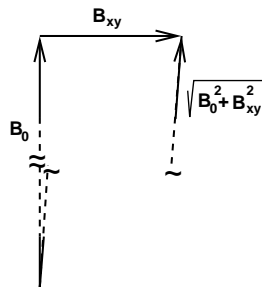
$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0 \quad \left(= \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z \right), \quad (56)$$

was bedeutet:

$$\text{wenn } \frac{\partial}{\partial z} B_z \neq 0 \quad \implies \quad \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y \neq 0. \quad (57)$$

Wenn also ein z-Gradient vorhanden ist, dann folgt allein daraus das Auftreten weiterer Gradienten anderer B-Feldkomponenten.

Man kann sich mit der folgenden groben Abschätzung überlegen, warum diese Komponenten – zumindest bei Standard-Messungen – nicht stören: Nimmt man als typisches Meßvolumen in einem Tomographen eine Kugel mit Durchmesser 0.5m und als Gradientenstärke 20mT/m an, dann liegt die Feldstärke der B_x - bzw. B_y -Komponente in der Größenordnung von $B_{x,y} \leq 10^{-2}T$; wegen der alles überragenden B_z -Komponenten mit der Stärke B_0 ist die relative Änderung des Betrags der Feldstärke $\Delta B/B_0$ verschwindend:



$$\begin{aligned} \frac{\Delta B}{B_0} &= \frac{1}{B_0} \left(\sqrt{B_0^2 + B_{x,y}^2} - B_0 \right) \\ &\approx \frac{B_{x,y}^2}{2B_0^2} < (\ll) 10^{-4}. \end{aligned} \quad (58)$$

Als Vektordiagramm dargestellt ergibt sich somit ein äußerst spitzes Dreieck; die Feldstörungen, die sich durch Zuschaltung der Gradienten ergeben, sind also vernachlässigbar.

Dies rechtfertigt gewissermaßen im Nachhinein die alleinige Beachtung der B_z -Komponente. Außerdem ließe sich daraus eine technische Obergrenze für die Gradientenstärke in Relation zum Hauptfeld abschätzen.

3.3 Schichtauswahl und k-Raum-Konzept

3.3.1 Schichtanregung

Mit den Gradienten wird die Magnetfeldstärke in kontrollierter Weise ortsabhängig, und so lassen sich die notwendigen Effekte erzielen:

Z.B. wird eine Schicht in der xy-Ebene dadurch angeregt, daß ein z-Gradient geschaltet und mit einer bestimmten Frequenz eingestrahlt wird; angeregt werden dann nur Protonen in derjenigen Schicht, in der gerade die Resonanzbedingung erfüllt ist. Die

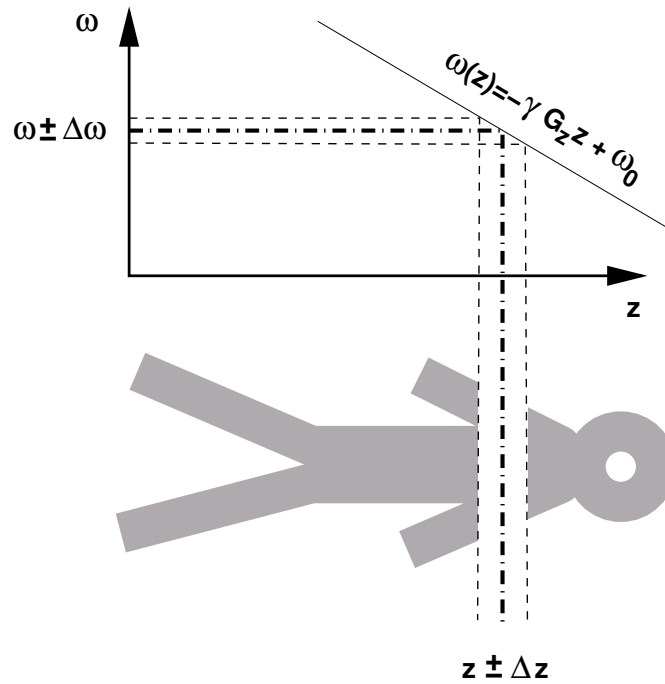


Abbildung 12: Schichtauswahl durch Anlegen eines Gradienten: Die Resonanzbedingung, und damit die Möglichkeit der Anregung, ist nur in einer zum Gradienten senkrechten Schicht gegeben, deren Schichtdicke Δz von der Gradientenstärke G_z und der Bandbreite $\Delta\omega$ der eingestrahlten Frequenz abhängt.

Schichtdicke hängt dabei von der Bandbreite der Anregung und von der Stärke des Gradienten (der Steilheit des Magnetfeldanstiegs) ab, wie in Abb. 12 skizziert ist. Mit Blick auf die Gleichungen (8) und (55) ergibt sich für den Zusammenhang zwischen Schichtdicke Δz , Gradient G_z (hier in z -Richtung) und Frequenzbandbreite $\Delta\omega$:

$$\omega + \Delta\omega = -\gamma \cdot (B_0 + G_z \Delta z)$$

und damit:

$$|\Delta\omega| = |\gamma \cdot G_z \cdot \Delta z|. \quad (59)$$

(Hier ist eine kleine Zusatzbemerkung nötig: Bei der angeregten Schicht soll das Schichtprofil möglichst rechteckig sein; um das zu realisieren, muß auch das zur Anregung verwendete Frequenzspektrum die Charakteristik einer Rechtecks-Funktion aufweisen. Dies ist gegeben, wenn der Anregungspuls die Form einer sinc-Funktion besitzt ($\text{sinc}(x) := \sin(x)/x$, siehe Anhang A.4).)

Das bislang dreidimensionale Problem hat sich nun also auf ein zweidimensionales reduziert.

Das Gewebe in der angeregten Schicht sendet dann ein Signal aus, dessen Stärke von der gewebstypischen Dichte der Wasserstoff-Atome, der sog. Protonendichte (PD), abhängt. Dieses Signal zerfällt mit den (ebenfalls gewebstypischen) T1- bzw. T2-Zerfallskonstanten (siehe Gln. (16),(17)).

Mittels geeigneter Manipulationen, die unten erläutert werden, lassen sich diese gewebstypischen Größen (T1, T2, PD) betonen oder unterdrücken, so daß sich jeweils unter-

schiedliche Signaldichten („Wichtungen“ oder „Kontraste“) erzeugen lassen. Genau diese Möglichkeit der Gewebedifferenzierung ist eine der Stärken der Kernspintomographie.

3.3.2 Bilddarstellung

Das Problem bezüglich der Bildgebung besteht nun darin, zu einer orts aufgelösten Darstellung dieses Signals $\sigma(x, y)$ – zu einem „Bild der Signaldichte“ – zu gelangen. (Hier wird bewußt von einer „Signaldichte“ gesprochen: Man stelle sich vor, man könnte die angeregte Schicht direkt mittels ihres abgestrahlten Signals *betrachten*; im ersten Augenblick nach der Anregung sähe man die Intensitäten gemäß der Dichteverteilung der Spins (Protonendichte); dann aber würden sich die Kontraste verschieben, und zwar wegen der unterschiedlichen und gewebeabhängigen T1- und T2-Zeiten, d.h. die hier interessierende Signaldichte ist zeitabhängig und damit i.Allg. ungleich der Protonendichte. Eine gezielte Beeinflussung dieser Signaldichte wird schließlich unterschiedliche Kontrastierungen in den Bildern erlauben – ein wesentliches Merkmal der Kernspin-Bildgebung.)

Wie dies bewerkstelligt werden kann wird schnell klar, wenn man sich die Wirkung der übrigen Gradienten auf die relative Phasenlage der Spins in der angeregten Schicht überlegt:

Die Resonanz-Winkelgeschwindigkeit ω in einem Magnetfeld bei eingeschaltetem Gradienten lautet gemäß Gln. (8) und (55):

$$\omega = -\gamma B = -\gamma(B_0 + \vec{G}\vec{r}) \implies \Delta\omega = -\gamma\vec{G}\vec{r}. \quad (60)$$

($\Delta\omega$ bezeichnet hier die ortsabhängige Änderung der Resonanz-Winkelgeschwindigkeit.) Durch einen Gradienten, der während einer Zeit T geschaltet ist, ergibt sich also eine relative Winkel-, bzw. Phasendifferenz $\Delta\phi$ der Kernspinorientierung, die ebenfalls ortsabhängig ist:

$$\Delta\phi = \Delta\omega T = -\gamma\vec{G}\vec{r} T. \quad (61)$$

Das ausgesandte Signal hängt nur von den transversalen Komponenten der Magnetisierung ab; dieser grundsätzlich zweidimensionale Vektor läßt sich elegant mit einer einzigen komplexen Zahl darstellen. Obige Phasendifferenz führt also zu einem ortsabhängigen komplexwertigen Phasenfaktor

$$e^{-i\gamma\vec{G}\vec{r} T}. \quad (62)$$

Dies gilt ganz allgemein.

Nun soll konkret das Gesamtsignal S berechnet werden, das die Spins der Schicht aussenden, nachdem zwei Gradienten geschaltet wurden, nämlich

- in x-Richtung ein Gradient G_x während der Zeit T_x und
- in y-Richtung ein Gradient G_y während der Zeit T_y .

Dazu ist das Signal aller Spins der Schicht zu summieren, genauer: Die ortsabhängige Signaldichte σ gewichtet mit dem entsprechenden Phasenfaktor ist über die gesamte Fläche A der Schicht aufzuintegrieren:

$$S = \int_A \sigma(x, y) e^{-i\gamma(G_x x T_x + G_y y T_y)} dx dy. \quad (63)$$

Mit den Definitionen

$$k_x := \gamma G_x T_x, \quad k_y := \gamma G_y T_y \quad (64)$$

wird Gleichung (63) zu

$$S = \int \sigma(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = S(k_x, k_y). \quad (65)$$

Dies ist aber ganz offensichtlich ein Wert der *Fourier-Transformierten* der gesuchten Funktion $\sigma(x, y)$ – ein Wert im k -Raum (siehe dazu Kapitel 5.1)! Genau das ist der wesentliche Punkt zum Verständnis der MR-Bildgebung, und mit dieser Erkenntnis hat man bereits das Grundproblem theoretisch gelöst:

Es ist also für jede Schicht der zugehörige k -Raum abzutasten und danach eine Fourier-(Rück-)Transformation durchzuführen, um σ zu erhalten – das MR-Bild!

Notgedrungen ermaßen kann in der Praxis der k -Raum weder vollständig noch kontinuierlich erfaßt werden, sondern es müssen Kompromisse eingegangen werden:

- Der k -Raum wird diskretisiert, d.h. es werden nur diskrete Werte, die in einer Matrix angeordnet sind, berücksichtigt;
- der k -Raum wird nicht vollständig erfaßt, sondern nur ein zentraler Teil um den Ursprung.

Beide Maßnahmen führen zu Störungen im Bild, auf die noch eingegangen wird (siehe Kap. 5.1.3). In diesem diskretisierten Teil des k -Raums steht nunmehr (vorerst!) eine elementare Möglichkeit der „Fortbewegung“ zur Verfügung: Mit Blick auf Gleichung (64) stellt offensichtlich der Ausdruck γG_i (mit $i = x, y$) eine *Geschwindigkeit* im k -Raum dar. Eine endliche Distanz Δk im k -Raum ist also allgemein gegeben durch dessen Integration über die Zeit:

$$\Delta k_i = \gamma \int_T G_i(t) dt \quad (i = x, y). \quad (66)$$

(Gleichung (64) hat nur deshalb eine so einfache Form, da ein zeitlich konstanter Gradient angenommen ist.) Dies wird nun verwendet, um den k -Raum zeilenweise abzutasten.

4 Sequenz und Konsequenz: Bildkontraste

Die Realisierung der oben beschriebenen k -Raum-Abtastung erfolgt in einer mehr oder weniger komplexen zeitlichen Aneinanderreihung von HF-Pulsen und Gradienten. Solche Abtaststrategien nennt man *Sequenzen*, und davon gibt es die verschiedensten Variationen.

Die Standard-Sequenztechniken teilen sich hauptsächlich in zwei große Gruppen auf: Die *Spinecho-Sequenzen* und die *Gradientenecho-Sequenzen*. (Diese Bezeichnungen sind nicht sehr logisch, sie sind aber historisch so entstanden.)

Dieses Kapitel behandelt die Grundlagen dieser beiden Sequenztypen in ihrer einfachsten Form. Wie man sehen wird, sind bei deren praktischer Umsetzung gewisse Meßparameter zu wählen; mittels dieser Parameter lassen sich die Bildkontraste (oder auch „Wichtungen“ genannt) *einstellen*, und man hat damit eine hervorragende Möglichkeit der Gewebisdifferenzierung bei gleichzeitig guter Ortsauflösung. Von primärer Bedeutung ist die Erzeugung der drei Grundkontraste (T1, T2, PD); um sich darunter etwas vorstellen zu können, sind diese Kontraste in Abb. 13 am Beispiel eines transversalen Schnittes durch den Schädel gezeigt.

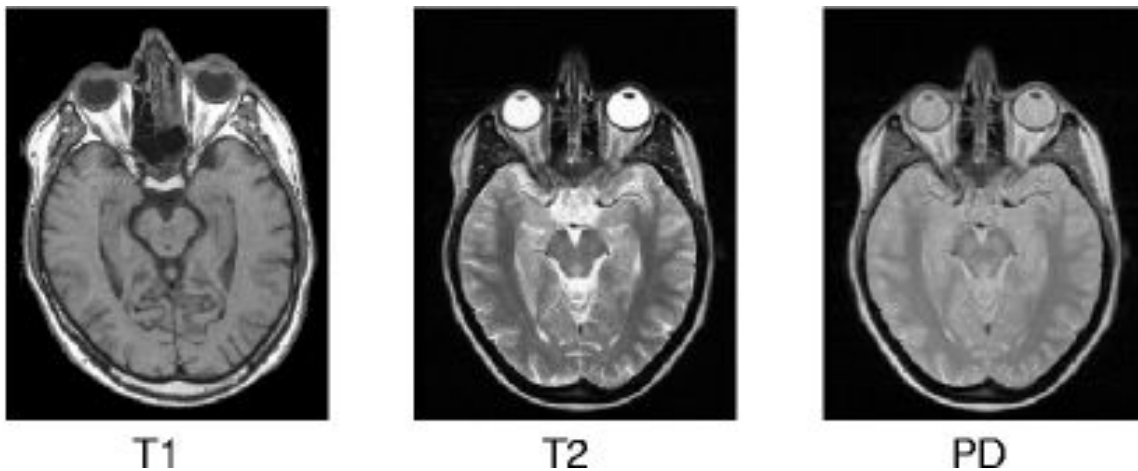


Abbildung 13: Schädel, jeweils identische transversale Schnittführung. Die drei Grundkontraste: T1, T2 und PD (Protonendichte).

Generell muß man (zumindest gedanklich) klar unterscheiden zwischen *Spinpräparation* (d.h. Kontrastwahl) und der reinen *Bildgebung*, auch wenn diese beiden Teile eng verzahnt realisiert sind.

Damit kann natürlich noch nicht gesagt werden, welche Gewebeart bei welcher Einstellung welches Signal liefert; diese Kenntnis ist zum Gutteil auch Empirie. In jedem Fall sind für die Befundung solcher Kernspinbilder ausgewiesene Spezialkenntnisse nötig.

Nach dem bisher beschriebenen kann man sich nun zunächst daran machen, die Gradientenecho-Sequenz zu verstehen.

4.1 Die Gradientenecho-Sequenz

Die Abfolge von Pulsen, Gradienten und Echos wird mit sog. „Pulsdiagrammen“ anschaulich gemacht (siehe Abb. 14). Nach oben ist die Gradienten- bzw. die Signalstärke

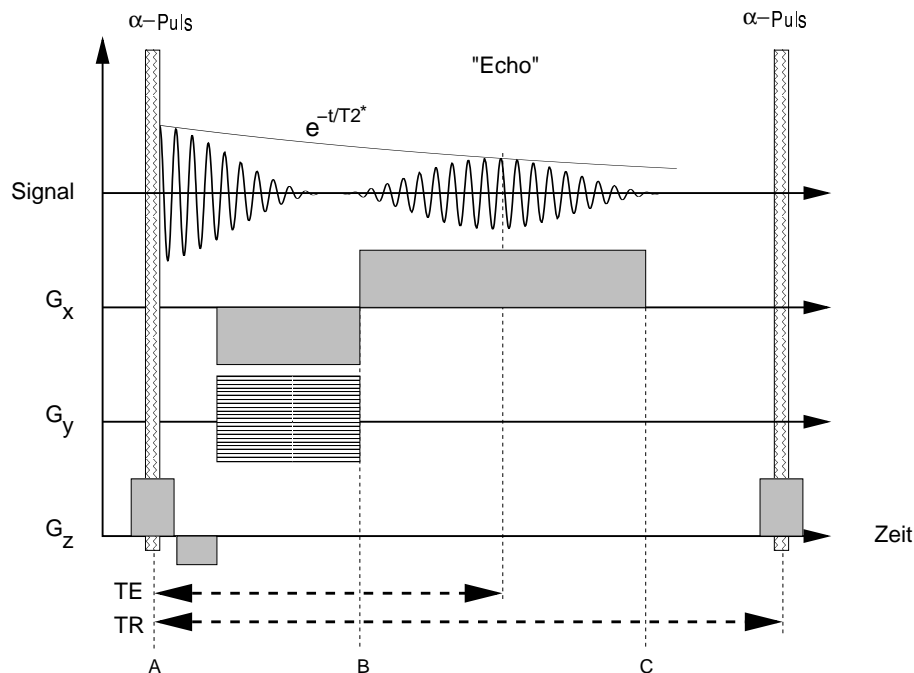


Abbildung 14: Pulsdiagramm: Schematische Darstellung der Gradientenschaltung und des resultierenden Kernspinsignals bei Gradientenechosequenzen. Die Stärke des Gradienten G_y wird sukzessive verändert, um den k -Raum zeilenweise zu scannen. Unmittelbar vor der nächsten Anregung (α -Puls) sind typischerweise noch sog. „Spoiler“ geschaltet, das sind Gradienten und HF-Pulse, die die Spindephasierung verstärken, um verbliebene Netto-Magnetisierung in x - y -Richtung zu zerstören (nicht dargestellt).

aufgetragen, nach rechts die Zeit. Die ausgefüllten Flächen sind dann also die Integrale der Gradienten über die Zeit und entsprechen damit gemäß Gleichung (66) einer Strecke im k -Raum.

Wie man sieht, kommen nun weitere wichtige Parameter ins Spiel:

- Der Flip-Winkel α , der durch die HF-Pulse eingestellt wird,
- die *Echozeit* TE, d.h. der Zeitraum zwischen Anregungspuls und k -Raum-Zeilenumitte,
- die *Repetitionszeit* TR, d.h. der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anregungen.

(Von „Echos“ ist allgemein in der MR-Theorie immer wieder die Rede; auch dieser Begriff ist historisch entstanden und nicht wörtlich zu nehmen; es handelt sich in keiner

Weise um eine Reflexion. Gemeint ist damit immer der Nulldurchgang einer k -Raum-Komponenten, und es ist offensichtlich, daß das Gesamtsignal dann ein relatives Maximum hat, da dann die Dephasierung minimal ist, vgl. auch Abb. 34.)

In Abb. 15 ist die zugehörige Bewegung im k -Raum gezeigt. Begonnen wird (im

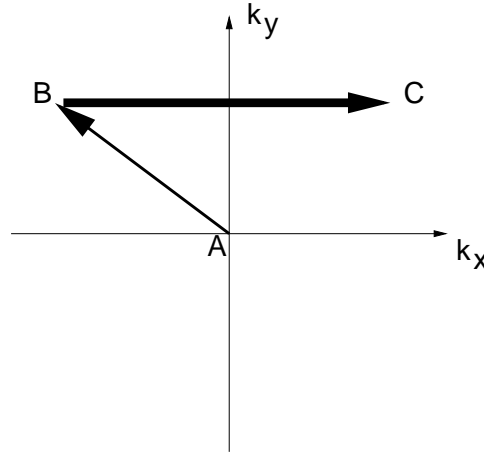


Abbildung 15: Entsprechende Bewegung im k -Raum bei Gradientenecho-Sequenzen. Die Datenerfassung findet jeweils zwischen den Punkten B und C statt.

Beispiel) mit dem Schalten von G_z und gleichzeitig einem α -Puls, um eine schichtselektive Anregung zu erreichen (Punkt A). Danach folgt G_z mit umgekehrtem Vorzeichen (Hälfte der Fläche), um die vorher erzeugte Dephasierung in der Tiefe der Schicht rückgängig zu machen.

Zum jeweiligen Zeilenanfang (Punkt B) gelangt man nach Anwendung von (im Beispiel) G_x und G_y . Während des Schaltens von G_x wird schließlich in diskreten Abständen über die Zeit (B→C) das von der Schicht ausgesandte Signal aufgezeichnet. Vor der Wiederholung dieser Prozedur (zum Scannen der nächsten Zeile) können sich noch jeweils Spoilerpulse anschließen. In dieser Weise wird also der relevante Teil des k -Raums Zeile für Zeile abgerastert.

Die Bedeutung von G_x, G_y, G_z bezieht sich natürlich nur auf das angegebene Beispiel; durch die beschriebene Linearkombinierbarkeit der Gradienten sind beliebige Schichtorientierungen möglich, und in diesem allgemeinen Fall ist üblich:

- Der Schichtselektionsgradient, geschaltet während der Anregung (im Beispiel: G_z), wird mit G_S (S: „slice“) bezeichnet;
- der Phasengradient stellt eine feste Dephasierung pro k -Raum-Zeile ein (im Beispiel: G_y), wird mit G_P (P: „phase“) bezeichnet;
- der Auslesegradient, geschaltet während des Auslesens (im Beispiel: G_x), wird mit G_R (R: „read“) bezeichnet.

4.1.1 Die Wichtungsmöglichkeiten bei der Gradientenechosequenz

Um das Kontrastverhalten von einzelnen Sequenzen verstehen zu können, ist die Kenntnis der lokalen Signalintensität in dem *dynamischen Gleichgewichtszustand* („steady state“) notwendig, der sich bei wiederholter Anwendung der jeweiligen Puls- und Gradientenabfolge einstellt. Für jede Sequenz wird dies in einer eigenen Formel ausgedrückt, die dafür im Grunde alle wesentliche Information enthält. Eine einfache Herleitung des steady-state-Zustandes der z-Komponenten findet sich im Anhang B.

Die gesuchte steady-state-Signalstärke S_{ss} ist proportional zur xy-Komponenten, die sich ergibt, wenn die z-Magnetisierung um den Winkel α gekippt wird (eben nach einem α -Puls), deshalb tritt noch ein Term „ $\sin \alpha$ “ auf. Außerdem muß die Spindephasierung, die während der Echozeit TE erfolgt, noch durch den Faktor „ $e^{-\frac{TE}{T2^*}}$ “ berücksichtigt werden. Für die Signalstärke S_{ss} in diesem dynamischen Gleichgewicht erhält man so den wichtigen Ausdruck (für Gradientenecho-Sequenzen):

$$S_{ss} \sim \rho \cdot \frac{1 - e^{-\frac{TR}{T1}}}{1 - \cos \alpha \cdot e^{-\frac{TR}{T1}}} \cdot \sin \alpha \cdot e^{-\frac{TE}{T2^*}}; \quad (67)$$

dabei bezeichnet ρ die tatsächliche Dichte der Spins (d.h. die Protonendichte „PD“). Die Signalstärke ist in Abhängigkeit von TR (in Einheiten von $T1$) und α in Abb. 16 gezeigt.

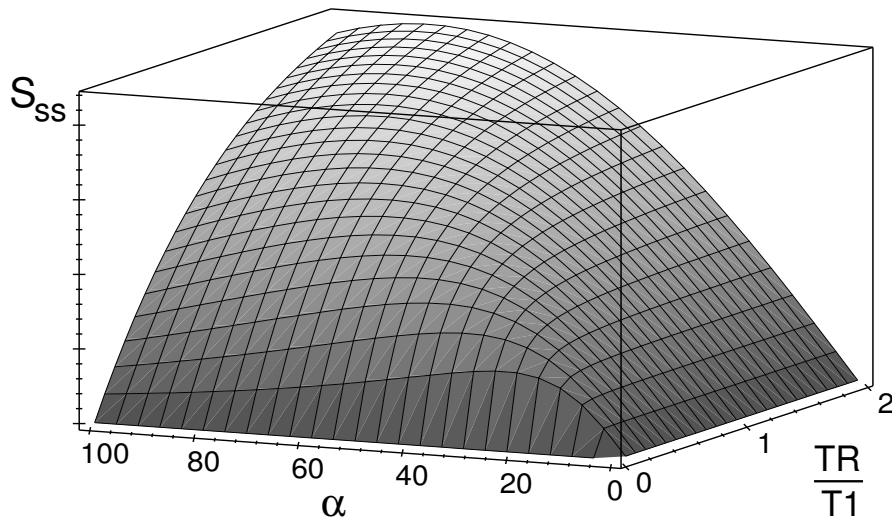


Abbildung 16: Abhängigkeit der Signalstärke von Repetitionszeit TR und Flipwinkel α .

Die Größe $T2^*$ bezeichnet eine Variante der $T2$ -Zeit: So, wie diese Sequenz abläuft, wird die Spin-Dephasierung nicht nur wegen der Spin-Spin-Wechselwirkung verursacht (genau *dieser* Signalabfall wird ausgedrückt durch die Größe $T2$), sondern zusätzlich durch lokale Magnetfeldinhomogenitäten, hervorgerufen durch Suszeptibilitätsschwankungen. $T2^*$ ist also (deutlich) kürzer als $T2$, und es gilt (ohne Herleitung, aber nicht unplausibel):

$$\frac{1}{T2^*} = \frac{1}{T2} + \gamma \cdot \Delta B \quad (\Delta B: \text{Feldinhomogenität in einem Volumenelement}). \quad (68)$$

Nun kann man schließlich daran gehen, die Möglichkeiten der Wichtung nach den verschiedenen Abklingzeiten zu untersuchen.

Als Parameter hat man in der steady-state-Formel (67) die Größen α, TR, TE , und diese müssen so gewählt werden, daß die Signalstärke näherungsweise nur noch von den gewebstypischen Größen $T1, T2, \rho$ abhängt, die dann also kontrastbestimmend gemacht sind:

- **Die $T1$ -Wichtung** beruht auf der Sättigung (d.h. unzureichende Relaxation) des Gewebes durch häufige Anregung

$$TR \leq (\approx) T1 \quad (69)$$

bei relativ großem Flipwinkel

$$\alpha \leq (\approx) \frac{\pi}{2} \implies \sin \alpha \approx 1, \quad \cos \alpha \approx \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad (70)$$

wobei die Spin-Dephasierung klein bleiben soll, was erreicht wird mit

$$TE \ll T2^*. \quad (71)$$

Das Signal (67) wird damit zu

$$S_{ss} \sim \rho \cdot \left(1 - e^{-\frac{TR}{T1}}\right), \quad (72)$$

d.h. $T1$ (und ρ) bestimmt den Kontrast.

- **Die $T2^*$ -Wichtung** wird durch die Spin-Dephasierung geprägt; dafür muß man dem System hinreichend Zeit geben und also das Echo spät abgreifen

$$TE \approx T2^* \quad (73)$$

und die Sättigung darf keine Rolle spielen

$$\alpha \text{ „klein“}, \quad TR > (\gg) T1; \quad (74)$$

das Signal lautet dann näherungsweise

$$S_{ss} \sim \rho \cdot e^{-\frac{TE}{T2^*}} \cdot \alpha, \quad (75)$$

wodurch man einen $T2^*$ -Kontrast erhält (wieder überlagert mit ρ).

- **Die Protonendichte-Wichtung** läßt sich schließlich erhalten, indem man zusätzlich durch kurze Echozeit TE die Spin-Dephasierung einschränkt, also:

$$TE \ll T2^* \implies e^{-\frac{TE}{T2^*}} \approx 1, \implies S_{ss} \sim \rho \cdot \alpha. \quad (76)$$

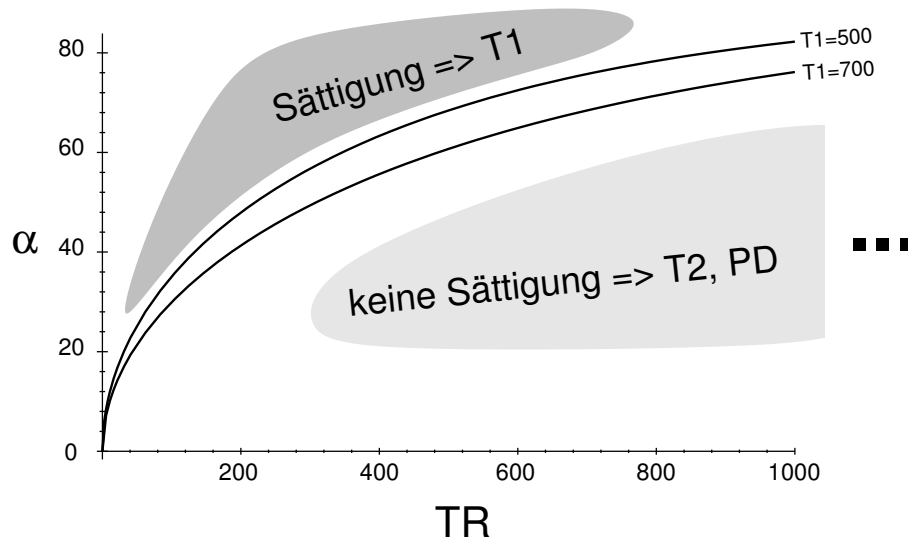


Abbildung 17: Abhängigkeit des Ernst-Winkels α_E von der Repetitionszeit TR und die sich ergebenden Parameter-Domänen.

Obige Aussagen und Angaben sind rein qualitativ – und nützlich für das Verständnis. Für eine MR-Messung ist aber die Wahl ganz konkreter Werte notwendig, und dafür bietet sich die folgende Überlegung an:

In Abb. 16 ist zu sehen, daß es offenbar zu jedem festen Wert von TR einen optimalen Flipwinkel α gibt, bei dem das Signal (Gl. (67)) maximal wird. Dieser Wert wird als *Ernst-Winkel* α_E bezeichnet und dafür ergibt sich:

$$\alpha_E = \arccos\left(e^{-\frac{TR}{T1}}\right). \quad (77)$$

Diese Funktion ist in Abb. 17 für den Bereich von typischen $T1$ -Werten dargestellt. Es ist wichtig festzuhalten, daß es nur zu jedem TR einen optimalen Flipwinkel α gibt, aber es gibt für ein bestimmtes α *kein* optimales TR , sondern für eine reine Signalmaximierung sollte TR beliebig groß sein. Andererseits ist die Meßzeit proportional zur TR -Zeit, weshalb möglichst kurze TR -Zeiten erwünscht sind.

Für die Kontrastwahl bei einem *festen* TR ist also der Flip-Winkel α entscheidend: Je größer dieser Winkel ist, desto größer ist der Sättigungseffekt; für eine $T1$ -Wichtung kommt dann nur ein Winkel $\alpha > \alpha_E$ in Frage, da nur so ein Kompromiß zwischen $T1$ -Wichtung einerseits und Signalstärke andererseits erreicht werden kann. (Die Wahl eines Winkels $\alpha < \alpha_E$ stellt dafür sicher keinen günstigen Kompromiß dar, da größere Winkel zu einem ausgeprägteren $T1$ -Kontrast *und* zu einem stärkeren Signal führen.) Soll dagegen für $T2$ - oder PD -Wichtung die Sättigung möglichst klein sein, dann macht aus dem analogen Grund nur $\alpha < \alpha_E$ Sinn. Insgesamt ergeben sich so feste Parameterdomänen, siehe Abb. 17.

Gerade diese Möglichkeit, nämlich trotz kurzer TR -Zeiten – und damit kurzen Meßzeiten – über die freie Kontrastwahl zu verfügen, ist der Hauptvorteil der Gradientenecho-Sequenzen gegenüber den unten vorgestellten Spinecho-Sequenzen. Die Charakterisierung „kurze TR -Zeiten“ bedeutet in diesem Zusammenhang also „kürzere TR -Zeiten als bei

Spinecho-Sequenzen“. Außerdem ist auch die minimale Echozeit kürzer als bei Spinecho-Sequenzen (Stichwort: Fehlender 180° -Puls).

4.2 Die Spinecho-Sequenz

Spinecho-Sequenzen gelten als die „typischen“ MR-Sequenzen. Insbesondere erhält man hier eine echte T_2 -Wichtung (und nicht T_2^* , bei dem Magnetfeldinhomogenitäten und also der Gewebeort eine Rolle spielen).

Für diese Technik ist ein neues Element notwendig: Der 180° -*Invertierungspuls*. Darunter ist im Grunde ein normaler Anregungspuls zu verstehen, allerdings mit einem Flip-Winkel von 180° . Dieser Puls führt dann dazu, daß das gesamte Spin-Ensemble um eine Achse, die in der xy -Ebene liegt, um 180° gedreht wird, während die Präzessionsrichtung gleich bleibt. Die xy -Komponenten aller Spins werden also exakt umsortiert: Die schneller präzedierenden, die also in ihrer Phasenlage fortgeschrittener waren, finden sich weiter hinten wieder, und umgekehrt, wie in Abb. 18 skizziert. In der Konsequenz

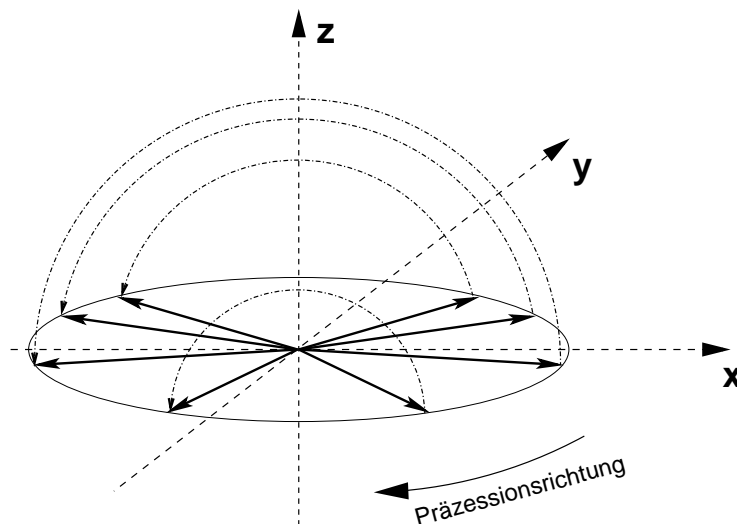


Abbildung 18: Die Wirkung eines Inversionspulses bzgl. der xy -Komponenten der Spins: Umkehrung der Reihenfolge (und damit Inversion der relativen Phasenwinkel) bei gleichbleibender Präzessionsrichtung.

sind zwei wichtige Feststellungen zu treffen:

1. *Lokale* Magnetfeldunterschiede als Ursache von Spindephasierung werden durch die invertierte Anordnung der Phasenlagen der Spin kompensiert. Eine T_2 -Wichtung ist deshalb nun tatsächlich T_2 , und nicht T_2^* ! (Gerne wird dafür zur Veranschaulichung das Beispiel von unterschiedlichen Läufern genommen, die gleichzeitig bei einer Startlinie starten; wenn jeder mit einer anderen Geschwindigkeit läuft, wird sich die Gruppe auseinanderziehen. Kehrt auf ein Kommando jeder seine Laufrichtung um, werden alle wieder gleichzeitig die Startlinie erreichen.)

2. eine solche Invertierung bedeutet für die Position im k -Raum eine Punktspiegelung am Ursprung, da ja danach die relativen Phasenlagen vertauscht sind, d.h. nun invertierte Vorzeichen tragen. Mathematisch ausgedrückt: Die relativen Phasenlagen $\Delta\phi$, die erzeugt wurden durch den Einfluß von Gradienten, ergeben sich (gemäß Gln. (61) und (64)) aus: $\Delta\phi = \vec{k} \cdot \vec{r}$; der 180° -Invertierungspuls führt dann zu $\Delta\phi \rightarrow -\Delta\phi$; da \vec{r} nicht invertiert wird, kann das nur bedeuten $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$. Dies ist eine weitere Möglichkeit, auf die k -Raum-Position Einfluß zu nehmen.

Das Pulsdiagramm einer Spinecho-Sequenz ist in Abb. 19 gezeigt. Abb. 20 zeigt da-

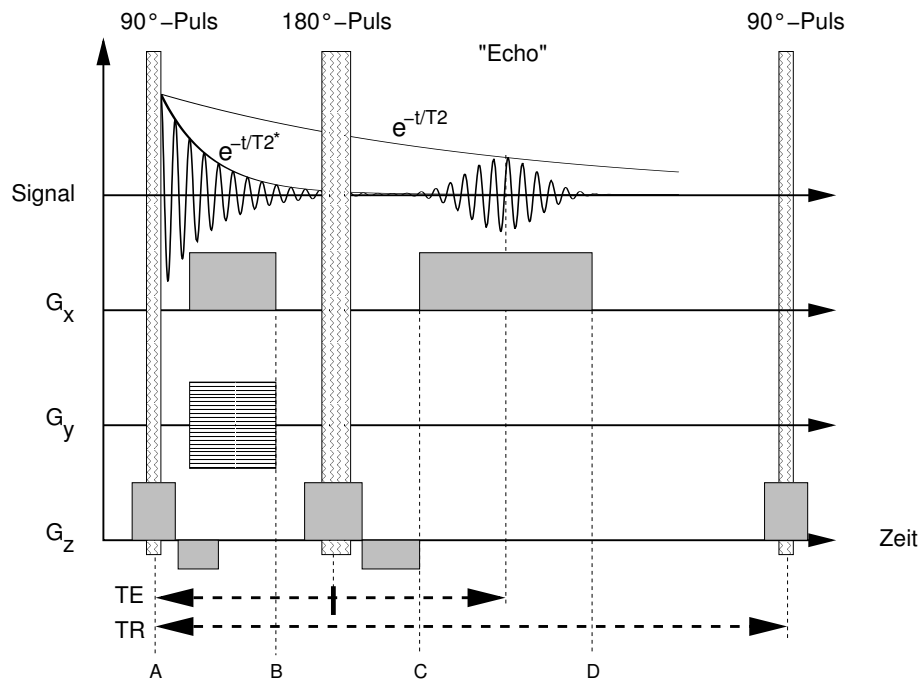


Abbildung 19: Pulsdiagramm: Schematische Darstellung der Gradientenschaltung bei Spinechosequenzen und des resultierenden Kernspinsignals. Die Stärke des Gradienten G_y wird sukzessive verändert, um den k -Raum zeilenweise zu scannen. Unmittelbar vor der nächsten Anregung (90° -Puls) sind typischerweise noch sog. „Spoiler“ geschaltet, das sind Gradienten und HF-Pulse, die die Spindephasierung verstärken, um verbliebene Netto-Magnetisierung in x - y -Richtung zu zerstören (nicht dargestellt).

zu die entsprechende Bewegung im k -Raum. Die Spinecho-Sequenz beginnt mit einem 90° -Anregungspuls während des Schaltens des Schichtselektionsgradienten (Punkt A). Anschließend wird eine bestimmte Stelle im k -Raum angefahren (Punkt B). Nach der halben Echozeit TE bringt ein Invertierungspuls das System an die dazu punktsymmetrische Stelle im k -Raum (Punkt C), dem Anfang der jeweils zu scannenden Zeile.

4.2.1 Die Wichtungsmöglichkeiten bei der Spinecho-Sequenz

Auch hier benötigt man wieder eine steady-state-Formel für die Signalstärke. Im Grunde kann die oben entwickelte Gleichung (67) verwendet werden, mit dem Unterschied, daß

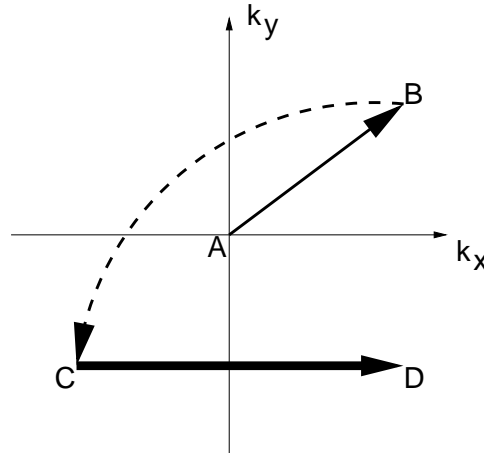


Abbildung 20: Zugehörige Bewegung im k -Raum bei Spinecho-Sequenzen. Die Datenerfassung findet jeweils zwischen den Punkten C und D statt.

konkret ein ($\alpha = 90^\circ$)-Anregungspuls verwendet wird und daß es sich wie oben erwähnt bei der Spin-Dephasierung nun tatsächlich um $T2$ statt $T2^*$ handelt. Man erhält also sofort die wichtige Beziehung:

$$S_{ss} \sim \rho \cdot \left(1 - e^{-\frac{TR}{T1}}\right) \cdot e^{-\frac{TE}{T2}}; \quad (78)$$

Die Erzeugung von Kontrasten kann damit einfach realisiert werden:

- **Die $T1$ -Wichtung** beruht wieder auf der Sättigung des Gewebes durch häufige Anregung

$$TR \leq (\approx) T1 \quad (79)$$

wobei die Spin-Dephasierung klein sein soll, was erreicht wird mit

$$TE \ll T2. \quad (80)$$

Das Signal (78) läßt sich dann schreiben als

$$S_{ss} \sim \rho \cdot \left(1 - e^{-\frac{TR}{T1}}\right), \quad (81)$$

d.h. $T1$ (überlagert mit ρ) bestimmt den Kontrast.

- **Die $T2$ -Wichtung** wird durch die Spin-Dephasierung geprägt; dafür muß man dem System hinreichend Zeit geben

$$TE \approx T2 \quad (82)$$

und eine Sättigung darf nicht eintreten

$$TR > (\gg) T1; \quad (83)$$

das Signal lautet dann näherungsweise

$$S_{ss} \sim \rho \cdot e^{-\frac{TE}{T2}}, \quad (84)$$

wodurch sich ein $T2$ -Kontrast ergibt (überlagert mit ρ).

- **Die Protonendichte-Wichtung** läßt sich schließlich erhalten, indem man wie bei der Gradientenecho-Sequenz Sättigung ausschließt

$$TR \gg T1 \quad (85)$$

und für eine Dephasierung zu wenig Zeit läßt

$$TE \ll T2, \quad (86)$$

woraus folgt

$$S_{ss} \sim \rho. \quad (87)$$

Um die Situation bildlich vor Augen zu haben, kann man diese Schaltzeiten als Domänen in einem Diagramm darstellen (siehe Abb. 21).

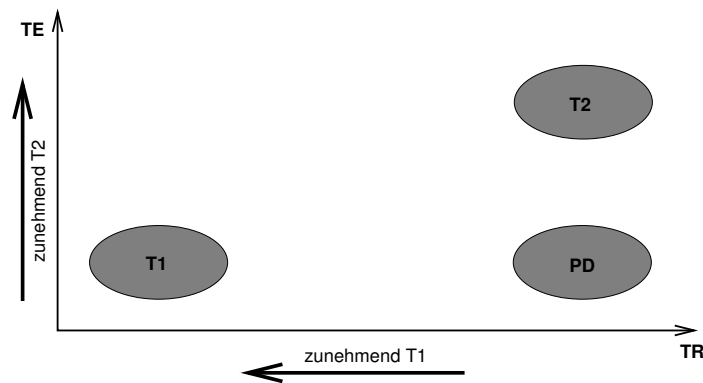


Abbildung 21: Parameterdomänen der einzelnen Wichtungen.

4.2.2 Der Bildkontrast

Der Begriff „Kontrast“ ist intuitiv: Der Kontrast zwischen zwei Gewebearten mit den Signalstärken S_1 und S_2 beschreibt im Wesentlichen die Differenz $|S_1 - S_2|$. Da es Sinn macht, dies in Relation zur Gesamtsignalstärke zu setzen, ist Kontrast C üblicherweise definiert als:

$$C := \frac{|S_1 - S_2|}{|S_1| + |S_2|}. \quad (88)$$

(Im Nenner sind die Beträge der Summanden zu nehmen, da es Sequenzen gibt, deren Signal auch negativ sein kann.) Dieser so normierte Kontrast ist damit eine Zahl im Bereich $[0, 1]$.

Zum T1-Kontrast: Bei der Vorstellung der Spinechosequenz wurde behauptet, daß für eine T1-Wichtung $TR \approx T1$ gelten muß. Mit einem vereinfachten Modell kann man nun versuchen, sich davon zu überzeugen; dieses einfache Modell bestehe aus nur zwei Substanzen mit den T1-Zeiten ($\langle T1 \rangle - DT$) und ($\langle T1 \rangle + DT$) mit dem Mittelwert $\langle T1 \rangle$. Für die Signalstärke ist hier lediglich der T1-Term $(1 - \exp(-TR/T1))$ aus Gl. 78

relevant. Zur Berechnung des Kontrasts ist dann dieser Term mit den entsprechenden $T1$ -Zeiten in Gl. 88 einzusetzen. Es stellt sich heraus, daß dieser so erhaltene Kontrast bei $TR \rightarrow 0$ maximal wird, was zwar wahr ist, aber sicherlich nicht dem entspricht, wonach man eigentlich sucht, da das Gesamtsignal dann verschwindet. Gesucht ist eigentlich das Kontrastmaximum unter der Nebenbedingung eines endlichen Signals; es bietet sich also an, das Produkt $C \cdot (1 - \exp(-TR/T1))$ zu maximieren (was freilich wieder auf den nichtnormierten Kontrast hinausläuft). Zu untersuchen ist somit der Ausdruck

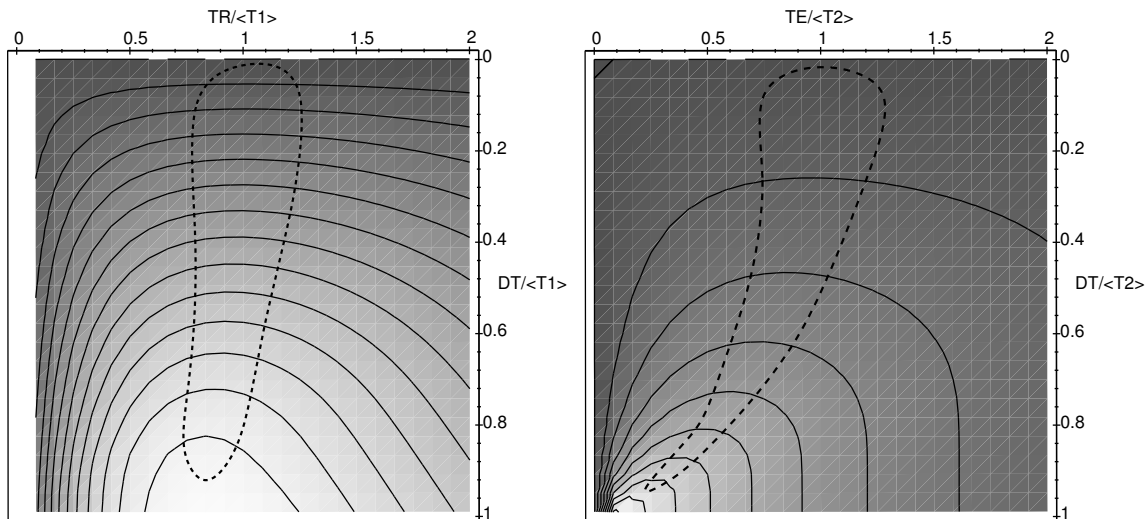
$$\frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{x}{1-y}\right)\right) - \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{1+y}\right)\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{x}{1-y}\right)\right) + \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{1+y}\right)\right)} (1 - \exp(-x)), \quad \left(x := \frac{TR}{\langle T1 \rangle}, y := \frac{DT}{\langle T1 \rangle}\right). \quad (89)$$

Der Plot dieser Funktion ist in Abb. 22(a) dargestellt; es zeigt sich, daß die optimale Repetitionszeit TR tatsächlich der mittleren $T1$ -Zeit entspricht.

Zum $T2$ -Kontrast: Hier wird das gleiche einfache Modell mit zwei $T2$ -Zeiten ($\langle T2 \rangle - DT$) und ($\langle T2 \rangle + DT$) verwendet; der $T2$ -Term aus Gl. 78 lautet $\exp(-TE/T2)$. Auch hier würde die alleinige Kontrastmaximierung zu $T2 \rightarrow \infty$ führen. Analog wurde deshalb das Produkt aus Kontrast und Signalterm untersucht, also der Ausdruck:

$$\frac{\exp\left(-\frac{x}{1+y}\right) - \exp\left(-\frac{x}{1-y}\right)}{\exp\left(-\frac{x}{1+y}\right) + \exp\left(-\frac{x}{1-y}\right)} \exp(-x), \quad \left(x := \frac{TE}{\langle T2 \rangle}, y := \frac{DT}{\langle T2 \rangle}\right). \quad (90)$$

Auch hier zeigt die graphische Darstellung in Abb. 22(b), daß die optimale Echozeit TE in der Größenordnung der mittleren $T2$ -Zeit liegt.



(a) Zum $T1$ -Kontrast. Das Kontrast-Signal-Maximum liegt bei $TR \approx \langle T1 \rangle$, fast unabhängig vom gegenseitigen $T1$ -Abstand DT der beiden Substanzen. (b) Zum $T2$ -Kontrast. Das Kontrast-Signal-Maximum liegt bei $TE \approx \langle T2 \rangle$. (Die großen Werte von DT sind nicht relevant.)

Abbildung 22: Zur Parameterwahl von $T1$ - und $T2$ -Wichtung.

Um ein Gefühl für die verwendeten Zeitskalen zu bekommen, seien hier einige Werte, wie sie in [7] zitiert werden, angegeben:

Gewebe	$T1$ [ms]					$T2$ [ms]
	0.15T	0.25T	0.5T	1.0T	1.5T	
Fett	174±28	190±28	214±28	242±28	260±28	84±36
Weiße Masse	354±17	422±17	537±17	684±17	787±17	92±36
Graue Masse	453±17	531±17	657±17	814±17	922±17	101±13
Leber	206±22	520±22	325±22	423±22	493±22	43±14
Niere	268±27	418±27	496±27	560±27	652±27	58±24
Muskel (Skelett)	330±18	409±18	548±18	733±18	869±18	47±13
Muskel (Herz)	377±16	454±16	583±16	749±16	868±16	57±16

Der Deutlichkeit halber soll hier aber noch einmal ganz klar erwähnt sein: Die gewebeabhängigen Größen $T1$ und $T2$ sind *idealisierte Größen* und resultieren allein aus dem Ansatz (16) und (17)! Der *dadurch implizierte* exponentielle Signalabfall stellt nur eine Näherung dar, die speziell für Fettgewebe schlecht ist. Für $T1$ und $T2$ konkrete Werte anzugeben ist also immer problematisch. So ist nicht verwunderlich, daß sich in der Literatur teilweise ziemlich unterschiedliche Werte finden. Insbesondere stellen die bei obigen Werten angegebenen Toleranzen sicherlich kein Maß für deren Genauigkeit dar. Als *Größenordnungen* für TR und TE haben sich die folgenden Werte bewährt (zumindest unterhalb von 2.0 Tesla):

Wichtung	Echozeit	Repetitionszeit
$T1$	$TE \leq 20\text{ms}$	$TR \approx 600\text{ms}$
$T2$	$TE \approx 100\text{ms}$	$TR \geq 3000\text{ms}$
PD	$TE \leq 20\text{ms}$	$TR \geq 3000\text{ms}$

4.3 Klassisches Modell der Relaxation

Bisher wurden die verschiedenen Arten der Relaxation betrachtet, ohne auf deren physikalischen Ursprung einzugehen. Tatsächlich spielen die zugrundeliegenden Mechanismen für das *Verständnis* der Bildgebung keine Rolle, weshalb dieses Kapitel auch ohne Schaden übersprungen werden kann. Im Sinne einer gewissen Vollständigkeit und Vertiefung soll hier dennoch ein qualitativer und sehr vereinfachter Blick auf die Theorie der Relaxation (z.B. [8], [9]) geworfen werden – eine Theorie, die für sich genommen schon ausgesprochen umfangreich und anspruchsvoll ist (siehe z.B. [10]), und außerdem viel älter als die Bildgebung.

Grundlage des Modells ist die Vorstellung, daß jeder Spin individuell ein zeitlich schnell veränderndes Magnetfeld in Form von zufälligen Fluktuationen spürt. Diese Fluktuationen hängen ab von der Beweglichkeit der Spins in ihrer Substanz (Flüssigkeit, Festkörper, etc.) und von der Temperatur. (Hier liegt bereits die Annahme zugrunde, daß man jeden Spin einzeln betrachten kann, der dann jeweils dem Feld aus der Summe

seiner benachbarten Spins ausgesetzt ist; die Wechselwirkung des Spins zurück auf seine Umgebung wird vernachlässigt: Eine sog. „mean-field-Näherung“.) Um diese Fluktuationen zu beschreiben, wird deren Fourier-Transformierte, d.h. deren Frequenzspektrum, verwendet, die sog. *spektrale Dichteverteilung* $J(\omega)$. Die spektrale Dichteverteilung gibt die relative Intensität an, mit welcher eine bestimmte Frequenz ω in diesen Fluktuationen enthalten ist (siehe Abb. 23).

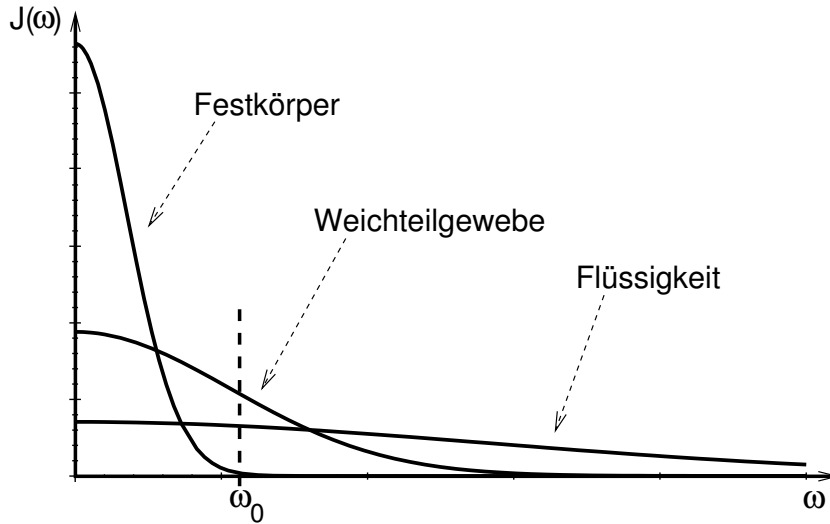


Abbildung 23: Schematische Darstellung der Spektralen Dichteverteilung $J(\omega)$. Deren Breite hängt ab von der inneren Mobilität und der Temperatur. Zu einem festen Argument ω_0 gibt es eine bestimmte Breite einer solchen normierten Verteilung, bei der der zugehörige Funktionswert $J(\omega_0)$ maximal wird; typischerweise liegt der Wert dieses Arguments dann in der Größenordnung der Standardabweichung.

Die Richtung des fluktuierenden Feldvektors ist ebenfalls zufällig, und es macht Sinn, dessen Komponenten einzuteilen in solche, die parallel zum Grundfeld B_0 sind, und in solche, die dazu senkrecht sind:

- Die senkrechte Komponente wirkt wie ein externes B_1 -Feld, wie es auch zur Anregung verwendet wird; es wirkt hier aber nicht kollektiv, sondern individuell. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die Größe $J(\omega_0)$, da nur mit der spezifischen Larmorfrequenz ω_0 Übergänge zwischen den beiden Spin-Niveaus (siehe Kap. 2.3) induziert werden können. Das Stattfinden dieser Übergänge bewirkt dann im Laufe der Zeit eine Boltzmannverteilung in der Besetzung der Niveaus, d.h. das thermische Gleichgewicht ist dann wieder hergestellt, die Relaxation vollzogen. Da dieser Mechanismus die Energieniveaus der Spins beeinflusst, handelt es sich um eine $T1$ -Relaxation; die $T1$ -Zeit ist deshalb abhängig von der Stärke des Grundfeldes B_0 , da dadurch die Größe $J(\omega_0)$ beeinflusst wird. (Nach [9] gilt näherungsweise $T1 \sim B_0^{0.3}$.) Darüber hinaus leistet dieser Mechanismus einen Beitrag zur $T2$ -Relaxation, da unter den ständigen Übergängen zwischen den Niveaus die Phasenkohärenz leidet.

- Die zum Grundfeld parallele Komponente hat die Wirkung wie ein fluktuierendes Grundfeld; hier ist hauptsächlich der statische Anteil, d.h. $J(0)$, relevant, ansonsten mitteln sich die zeitlichen Schwankungen weg. Ein individuell unterschiedliches Feld für jeden Spin führt zu einer Dephasierung, und damit zu einer $T2$ -Relaxation, die also vom Grundfeld B_0 unabhängig ist.

Insgesamt zeigt sich also die folgende Situation (siehe Abb. 24):

Bei Festkörpern liegt die $T1$ -Zeit in der Größenordnung von Stunden, da die spektrale Dichteverteilung $J(\omega)$ schmal und damit der Wert $J(\omega_0)$ sehr klein ist (siehe Abb. 23). Außerdem ist dann $J(0)$ groß, was zu einer schnellen $T2$ -Relaxation führt; tatsächlich liegt die $T2$ -Zeit von Festkörpern im Bereich von Mikrosekunden.

In Flüssigkeiten ist die $T1$ - und die $T2$ -Zeit sehr ähnlich und beträgt einige Sekunden. Dies kann durch die sehr breite Verteilung der spektralen Dichte erklärt werden, bei der $J(0)$ und $J(\omega_0)$ gleichermaßen klein sind. (Daß sich die $T1$ - und die $T2$ -Zeit ausgesprochen angleichen, muß nicht verwundern: Auch wenn die Dephasierung beliebig langsam abläuft – die $T2$ -Zeit ist definiert als Zerfallszeit der horizontalen Komponente, und damit gilt näherungsweise $T2 \leq T1$.)

Weichteilgewebe liegt gewissermaßen zwischen diesen beiden Extremen. Während mit zunehmender Breite der spektralen Dichteverteilung der Wert von $J(0)$ sinkt und damit die $T2$ -Zeit monoton ansteigt, besitzt $J(\omega_0)$ in diesem Bereich ein Maximum und also die $T1$ -Zeit ein Minimum.

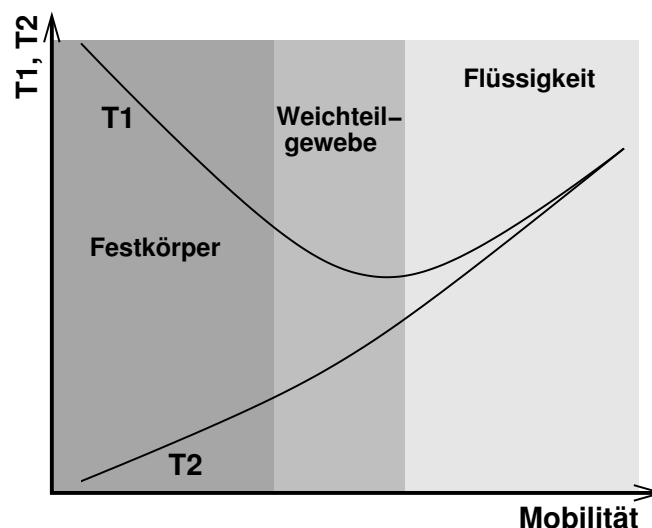


Abbildung 24: Relaxationszeiten in Abhängigkeit von der inneren Mobilität der jeweiligen Substanz.

So erklärt sich auch die Wirkung von paramagnetischen Kontrastmitteln: Durch Gabe solcher Kontrastmittel werden die magnetischen Fluktuationen verstärkt, wodurch sich die Relaxationszeiten verkürzen; Kontrastmittelanreicherungen erscheinen im $T1$ -Bild dann hell.

Die hier vorgestellte Argumentation entspricht – sehr vereinfacht – der sog. *BPP-Theorie* (N. Bloembergen, E.M. Purcell, R.V. Pound; 1948). Nach einer Idee von W. Nitz (siehe auch [2]) läßt sich der beschriebene Sachverhalt eindrucksvoll am Beispiel von Wasser und Eis demonstrieren (Abb. 25).



Abbildung 25: T_2 -gewichtetes Bild von Eiswürfel in Wasser. Während Wasser durch eine lange T_2 -Zeit ein helles Signal gibt, erfolgt die T_2 -Relaxation im Eis so schnell, daß von dort kaum ein Signal ausgeht. (Die T_1 -Zeit von Eis ist außerdem so lang, daß Sättigung unvermeidlich ist.)

5 Grundlegende Eigenschaften der Methode

5.1 Ein bißchen Fourier–Theorie

Wie in Kap. 3.3.2 gezeigt, sind die gemessenen Daten mit den Bilddaten über eine Fourier–Transformation verknüpft. Will man für diesen Zusammenhang ein anschauliches (eindimensionales) Modell vor Augen haben, kann man an eine Frequenzanalyse denken: Durch einen Gradienten hängen die gesendeten Frequenzen linear vom Ort ab; mit einer Frequenzanalyse erhält man dann direkt die Verteilung der Sendedichte (siehe Abb. 26).

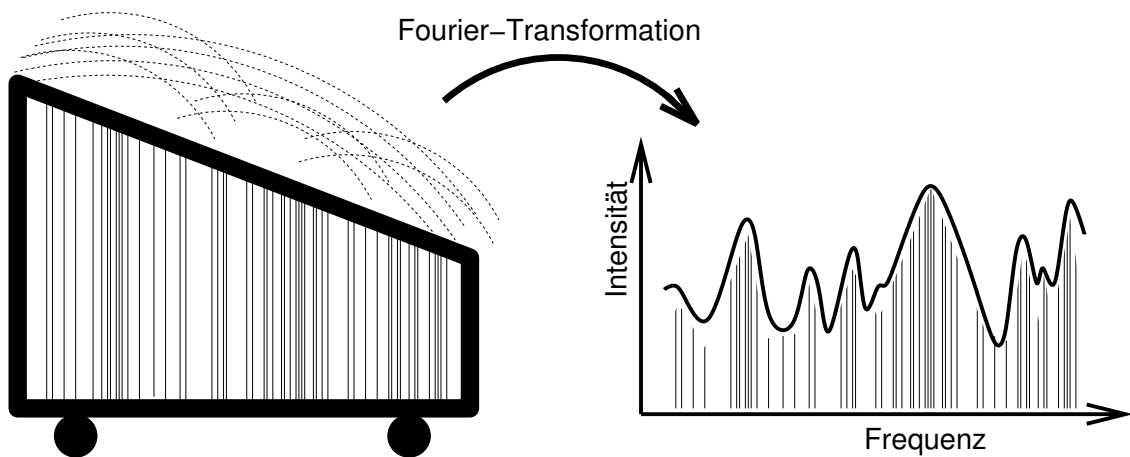


Abbildung 26: Modell „Harfe“: Eine ungleichmäßige Verteilung der Saiten kann direkt durch Frequenzanalyse des Gesamtklanges bestimmt werden. (Dies gilt nur unter der unmusikalischen Annahme, daß sich die Frequenz der Saiten linear mit dem Ort ändert . . .)

Die Theorie zur Fourier–Transformation ist nun sicher nicht MR–spezifisch; sie ist aber dabei von so zentraler Bedeutung, daß es für jedes ernsthafte MR–Skriptum unverzichtbar ist näher darauf einzugehen. Die gesamte MR–Bildgebung und deren wesentliche Eigenheiten lassen sich nur durch die Fourier–Theorie verstehen, und schließlich wird man vom k –Raum auch in der täglichen MR–Routine verfolgt.

5.1.1 Die Fourier–Transformation

Die Fourier–Transformation ist eine komplexwertige Integraltransformation beliebiger Dimensionalität n und lautet in ihrer abschreckenden mathematischen Allgemeinheit exakt (z.B. [11], [12]):

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{k}\vec{x}} f(\vec{x}) d^n x \quad (91)$$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\vec{k}\vec{x}} F(\vec{k}) d^n k \quad (92)$$

(Bei Bildern gilt natürlich $n = 2$.) Anschaulich gesprochen beschreibt diese Transformation eine „Datenumwandlung“ aus einem „Ortsraum“ \vec{x} in einen „ k –Raum“ \vec{k} (Gleichung (91)), bzw. von da zurück (Gleichung (92)). Anstelle von „ k –Raum“ finden sich oft auch die Bezeichnungen „Impulsraum“ oder „reziproker Raum“. Der Informationsgehalt in diesen Datensätzen $(f(\vec{x}), F(\vec{k}))$ ist derselbe, nur die Darstellung ist jeweils eine andere.

Natürlich können auch beliebige weitere Sätze von Variablen durch die Fourier–Transformation miteinander in Beziehung stehen; gemeinsam ist dabei nur, daß sie zueinander *reziprok* sind, d.h. ihr Produkt (also z.B. $k \cdot x$) muß dimensionslos sein. Ein weiteres wichtiges Paar von Variablen, die durch eine Fourier–Transformation miteinander verknüpft sind, ist also die Zeit t und die Kreisfrequenz ω :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{bzw.} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (93)$$

Die wesentliche Erkenntnis der gesamten MR–Bildgebung war die formale Wiedererkennung der Gleichung (91) in Gleichung (65); die bei einer MR–Messung erhaltenen Daten sind also k –Raum–Daten, auf die die Rücktransformation (92) anzuwenden ist, um die Ortsraum-, bzw. Bilddaten zu erhalten.

Bei der technischen Durchführung der Fourier–Transformation werden nicht die Integrale in Gln. (91) und (92) berechnet, sondern es kommt – nach Diskretisierung der Daten – ein sog. *fast fourier Algorithmus* (FFT, z.B. [12]) zum Einsatz, der um Größenordnungen schneller ist.

5.1.2 Die Bedeutung des k –Raums

Mit Blick auf Gleichung (92) läßt sich unschwer die Bedeutung der Daten im k –Raum erschließen:

$e^{i\vec{k}\vec{x}}$ beschreibt eine komplexe ebene Welle in Richtung \vec{k} mit der Ortsfrequenz $|\vec{k}|$; die komplexen Werte $F(\vec{k})$ legen also Amplitude und Phase der ebenen Wellen fest (Abb. 27), so daß sie in ihrer Summe gerade $f(\vec{x})$ ergeben.

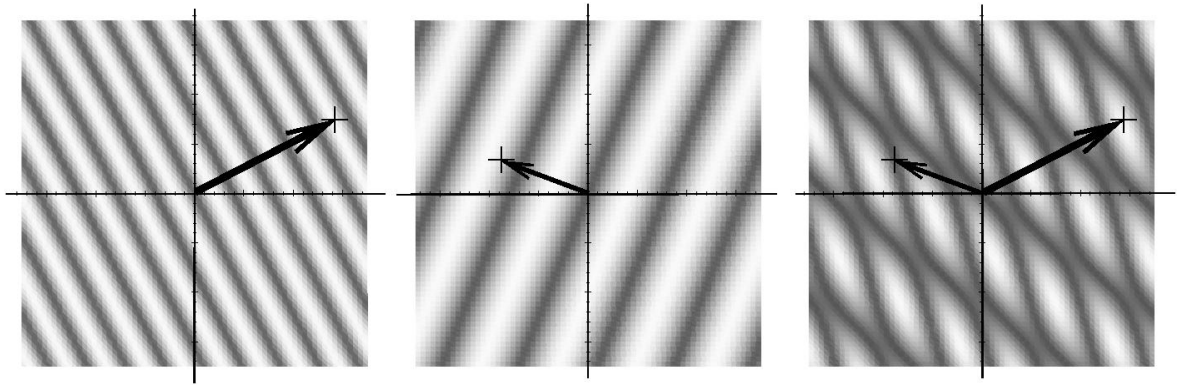


Abbildung 27: Fourier–(Rück-)Transformierte einzelner Punkte im k -Raum mit ihren k -Vektoren. Im Bildraum ergeben sich ebene Wellen mit definierter Richtung, Amplitude und Phase. (Die Darstellung hier ist schematisch.)

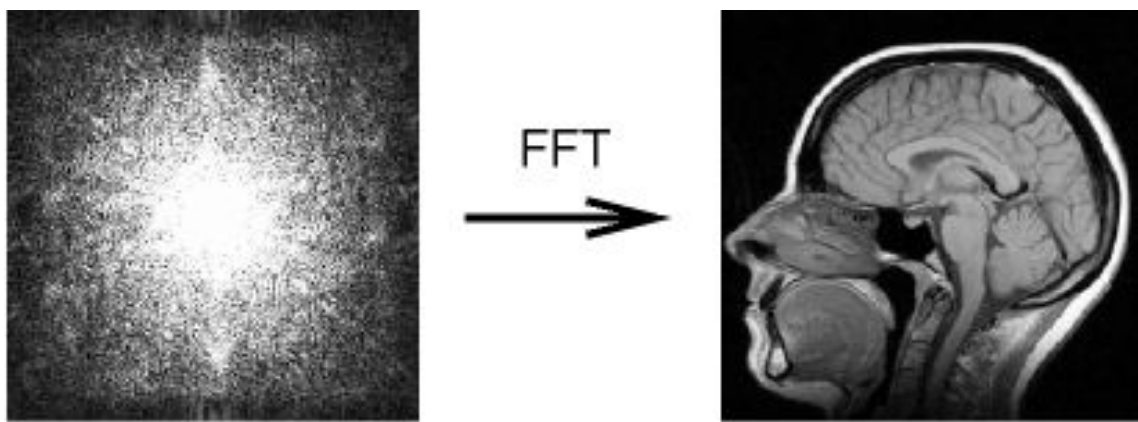


Abbildung 28: Fourier–Rücktransformation (Schädel, T1, sagittal). Stellvertretend für den k -Raum sind die Beträge der k -Raum–Daten $|F(\vec{k})|$ (links) und das daraus resultierende Betragsbild $|f(\vec{x})|$ (rechts) gezeigt.

In Abb. 28 ist eine k -Raum–Darstellung (hier nur die Werte $|F(\vec{k})|$) und das zugehörige Bild ($|f(\vec{x})|$) in einem Beispiel gezeigt. Solche Darstellungen bzw. Gegenüberstellungen findet man in der Literatur häufiger; da aber die Fourier–Transformation grundsätzlich komplexwertig ist, muß dabei klar betont werden, daß man sich auf jeder Seite prinzipiell *zwei* Datensätze vorzustellen hat: Entweder Real- und Imaginärteil, oder Betrag und Phase; aus einem *einzigem* k -Raum–Bild ließe sich niemals ein vernünftiges MR–Bild gewinnen – natürlich sind dann auch die MR–Bilder selbst zweikomponentig (siehe Kap. 6.4).

Um sich von dem oben Gesagten zu überzeugen, kann man diesen k -Raum manipulieren und sich davon die Konsequenzen ansehen:

In Abb. 29 wurden die Daten, die weiter von der k -Raum–Mitte entfernt liegen, gelöscht und nur ein zentraler Teil übrig gelassen; folglich erhält man im zugehörigen Bild hauptsächlich nur noch Kontraste (d.h. die niedrigen Ortsfrequenzen), während die Auflösung sich deutlich verschlechtert hat. Dies entspricht einem Tiefpass–Filter.

Werden umgekehrt – wie in Abb. 30 gezeigt – die zentralen k -Raum–Daten verwor-

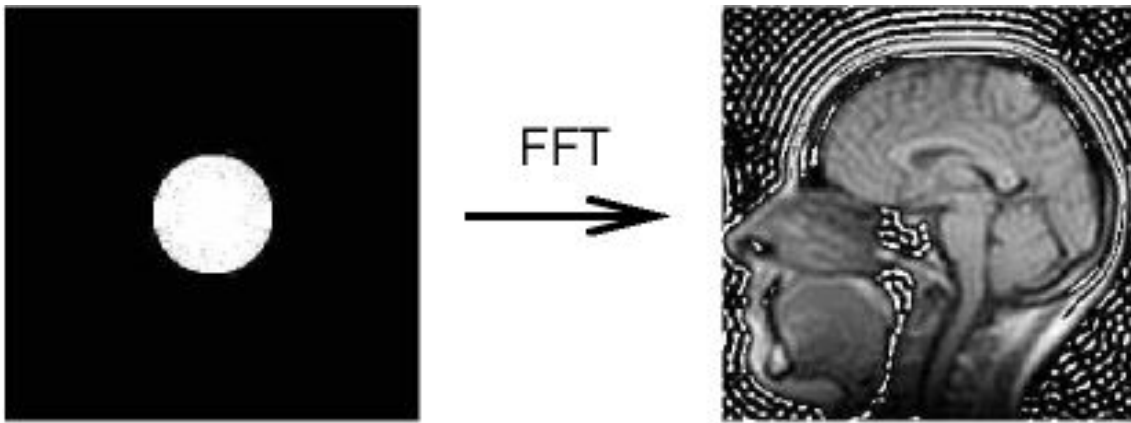


Abbildung 29: Zentrumsferne Daten im k -Raum sind gelöscht, es fehlen die hohen Frequenzen im Ortsraum; im daraus resultierenden Bild sind die Kontraste noch erhalten, aber die Auflösung hat sich massiv verschlechtert („Tiefpass“).

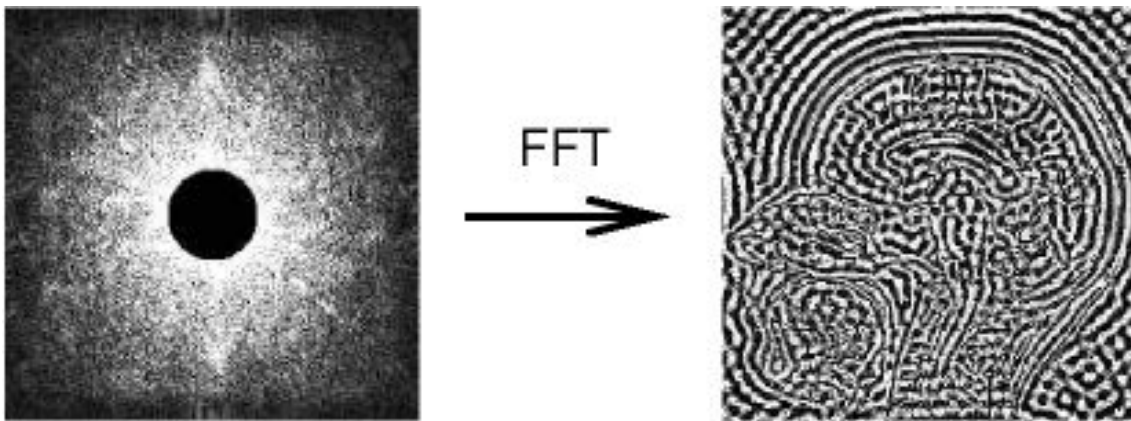


Abbildung 30: Die zentrumsnahen k -Raum-Daten sind gelöscht; es fehlen die niedrigen Frequenzen im Ortsraum; folglich gehen die Kontraste verloren, aber die Auflösung bleibt erhalten („Hochpass“).

fen, gehen die Kontraste verloren, aber die Bildauflösung (mittels der hohen Ortsfrequenzen) bleibt erhalten. Es findet also so eine Hochpass-Filterung statt.

Mit diesen Bildern läßt sich auch gut ein Eindruck von deren Zusammensetzung aus Wellen erhalten.

Die erwähnte Bedeutung der Position des k -Raums hat unmittelbare praktische Konsequenzen: So ist es z.B. bei kontrastmittelgestützten Angiographien (Gefäßdarstellungen) notwendig, daß *genau dann*, wenn die Kontrastmittelanflutung durch den interessierenden Bereich fließt, die Mitte des k -Raums gescannt wird, da ja dann die Kontraste festgelegt werden.

5.1.3 Besonderheiten bei der Datenakquirierung

Wie bereits oben erwähnt, wird der k -Raum aus technischen Gründen weder kontinuierlich, noch vollständig erfaßt, sondern:

- Die Abtastung kann nur in diskreten Schritten erfolgen; es handelt sich deshalb bei der MR–Bildgebung nicht wirklich um eine (kontinuierliche) Fourier–Transformation, sondern dementsprechend um eine diskrete *Fourier–Zerlegung* (oder diskrete Fourier–Transformation);
- Es kann – verständlicherweise – nur ein endlicher Teil des k –Raumes erfaßt werden.

Die k –Raum–Daten und die daraus zu berechnenden Bild–Daten liegen in Form von einem rechteckigen Zahlenschema, einer sog. Matrix, vor. Die Dimension dieser Matrix ist typischerweise eine Potenz von 2 (z.B. 256, 512, 1024); dies ist wegen der anschließenden Transformation der Daten aus dem k –Raum in den „realen“ Bild–Raum durch einen Fast–Fourier–Algorithmus (FFT) sinnvoll. In Abb. 31 ist die Situation skizziert. Die verwendeten Datensätze sind zwar mindestens zweidimensional (es lassen sich auch

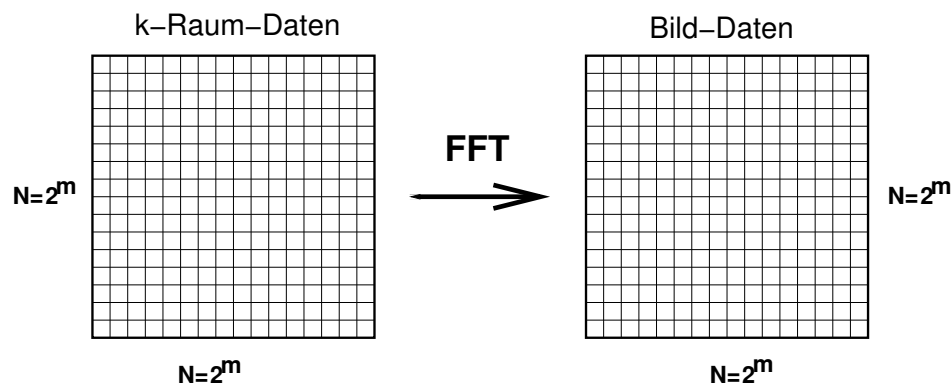


Abbildung 31: Die Situation bei der Berechnung von MR–Bildern. Die Datensätze besitzen identische Dimensionierung. Die Richtung der Fast–Fourier–Transformation (FFT) ist prinzipiell auch umkehrbar, d.h. die beiden (komplexwertigen!) Datensätze sind gleichberechtigt.

dreidimensionale Datenblöcke gewinnen), um aber die grundlegenden Eigenschaften zu verstehen, genügt es, den eindimensionalen Fall zu betrachten.

Im eindimensionalen Fall lautet die Fourier–Zerlegung einer periodischen Funktion $f_L(x)$ (mit der Periodenlänge L) mathematisch exakt:

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}; \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} f_L(x) e^{-ik_n x} dx, \quad (94)$$

$$\text{wobei} \quad k_n := \frac{2\pi}{L} n. \quad (95)$$

Es handelt sich generell um eine komplexwertige Transformation, d.h. die k –Raum–Daten sind komplexwertig, und die Bilddaten sind es im Grunde ebenfalls; bei der Standard–Bildgebung wird aber nur deren Betrag dargestellt (siehe Kap. 6.4).

Die Gleichungen (94) müssen aber noch modifiziert werden, um die Situation, wie sie bei der MR–Bildgebung vorliegt, zu beschreiben:

- Die Funktion wird nur mit endlich vielen (eben mit $N = 2^m$) Termen rekonstruiert; für eine solchermaßen gewonnene Funktion $\tilde{f}_L(x)$, die sich von der ursprünglichen Funktion $f_L(x)$ unterscheidet, gilt:

$$\tilde{f}_L(x) = \sum_{n=-2^{m-1}}^{+2^{m-1}} c_n e^{i k_n x}; \quad (\neq f_L(x)). \quad (96)$$

In der Konsequenz von Gl. (96) können scharfe Übergänge, d.h. Kontrastsprünge, nicht approximiert werden, da die dafür nötigen hohen Ortsfrequenzen fehlen.

- Die Fourier-Koeffizienten c_n entsprechen den Messwerten beim Scanvorgang. Dabei trägt die gesamte Schicht zum Signal bei, und nicht nur derjenige Teil der Schicht, der im gewählten Bildausschnitt liegt. Die mathematische Bedeutung der Koeffizienten muß dann eher formuliert werden als

$$c_n \sim \int_{-\infty}^{\infty} f_L(x) e^{-i k_n x} dx. \quad (97)$$

Durch die Ausdehnung der Integrationsgrenzen in Gl. (97) macht sich nun die implizite Periodizität des Fourier-Ansatzes bemerkbar: Für Bildanteile, die um die Periodizitätslänge L verschoben und damit außerhalb des Bildbereiches sind, ergeben sich die gleichen Koeffizienten c_n , als lägen sie *im* Bildbereich:

$$\begin{aligned} c_n &\sim \int_{-\infty}^{\infty} f(x+L) \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} n x\right) dx = \\ &\underbrace{y := x+L}_{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} n y\right) dy \underbrace{\exp(i \cdot 2\pi n)}_{=1}. \end{aligned} \quad (98)$$

Bei der Rücktransformation werden deshalb solche außenliegenden Bildanteile immer um L versetzt im Bild auftauchen. Diesen Effekt bezeichnet man als *Einfaltung*.

Ein eindimensionales Beispiel soll diese Konsequenzen veranschaulichen:

Abb. 32 zeigt die darzustellende Struktur ($f_L(x)$); als gewählter Bildausschnitt ist in diesem Beispiel das Intervall $[-2, 2]$, also der Länge $L = 4$, gewählt, was aber bereits die Periodenlänge festlegt. Strukturen, die über den Bildrand stehen, senden ebenfalls ein MR-Signal aus und beeinflussen damit die bei der Messung erhaltenen Fourier-Koeffizienten c_n , eben in der Art von Gleichung (97).

Aufschlußreich ist deshalb die Abb. 33, die das so erzeugte „MR-Bild“ $\tilde{f}_L(x)$ darstellt: Mit zunehmender Zahl der berücksichtigten Terme (vgl. Gl. (96)) wird die ursprüngliche Struktur immer besser approximiert (durch Berücksichtigung zunehmend zentrumsferner k -Raum-Daten); dies gilt allerdings eben nur eingeschränkt für scharfe Kanten. Außerdem ist tatsächlich der überstehende Bildteil am gegenüberliegenden Rand eingefaltet, wie es nach der Theorie auch sein soll.

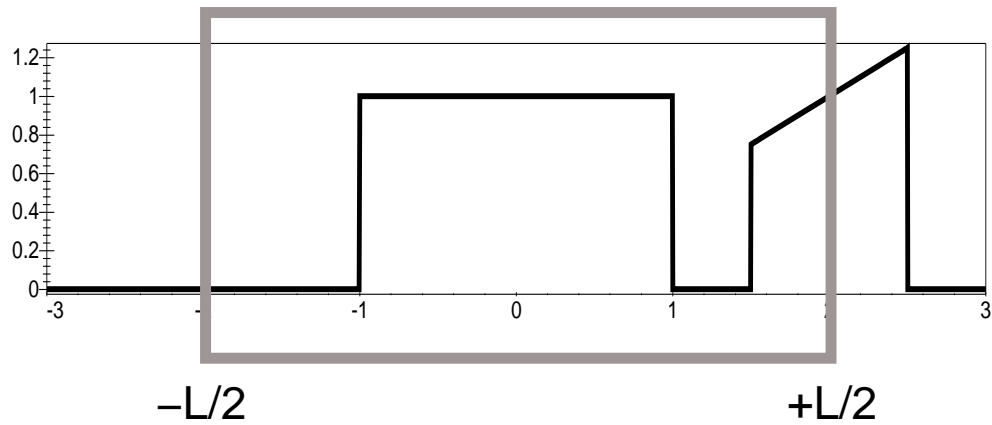


Abbildung 32: Eine abzubildende Test–Struktur ($f_L(x)$) als Relief. Der graue Rahmen bezeichnet den Bildausschnitt, der tatsächlich dargestellt werden soll; man beachte, daß ein Teil der Struktur „übersteht“. Auch solche Strukturen jenseits des zu erzeugenden Bildes geben natürlich ein Signal.

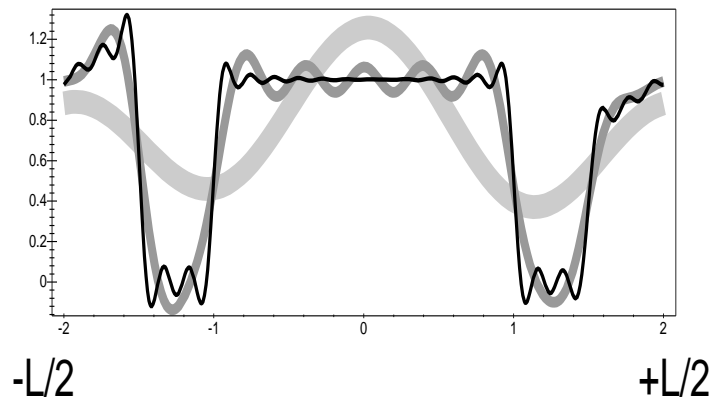


Abbildung 33: Das mittels endlicher Fourier–Reihe rekonstruierte Bild der Test–Struktur ($\tilde{f}_L(x)$) unter Berücksichtigung der ersten 2 (hellgrau), 10 (dunkelgrau) und 25 (schwarz) Fourier–Terme. Wegen der impliziten Periodizität der Fourier–Reihe tauchen überstehende Strukturen am gegenüberliegenden Bildrand wieder auf.

Die Unterschiede zwischen beiden Bildern (d.h. zwischen den Funktionen $f_L(x)$ und $\tilde{f}_L(x)$) sind jedenfalls ziemlich offensichtlich; in der Praxis bleiben diese Unterschiede – wenn auch quantitativ abgeschwächt – qualitativ bestehen.

5.1.4 Auflösung im Orts- und im k –Raum

Aus Gl. (95) läßt sich ein wichtiger genereller Zusammenhang ersehen:

$$k_n - k_{n-1} = \Delta k = \frac{2\pi}{L}. \quad (99)$$

In der Auflösung, d.h. in der Pixelgröße Δk des k –Raums, ist also die Länge L des zu erzeugenden Bildes enthalten. Umgekehrt findet man für die Länge K des gescannten

Bereichs im k -Raum:

$$K = N\Delta k = \frac{2\pi}{L/N} = \frac{2\pi}{\Delta x}, \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\Delta x = \frac{2\pi}{K}}; \quad (100)$$

d.h. die Ortsauflösung Δx wird analog durch die Länge K des k -Raums bestimmt. (Hier wird verständlich, warum der k -Raum auch als *reziproker Raum* bezeichnet wird.)

Völlig analog gilt natürlich für die diskrete Transformation im $(\omega - t)$ -Ensemble:

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{bzw.} \quad \Delta\nu = \frac{1}{T}}. \quad (101)$$

Bezeichnet T die Zeit für das Auslesen einer Phasenraumzeile, dann stellt $\Delta\nu$ die Auflösung im Frequenzraum dar. Diese Größe wird auch als *Auslesebandbreite* bezeichnet, und hat die Einheit Hz/Pixel.

Es mag zunächst vielleicht irritieren, daß erst im $(\omega - t)$ -Ensemble gemessen wird, um dann anschließend im $(k - x)$ -Ensemble die Rücktransformation durchzuführen. Diese beiden Formen sind hier tatsächlich äquivalent. Um sich hiervon zu überzeugen, muß man nur den Winkel $\Delta\phi$ der Spindephasierung, die durch einen Gradienten G erfolgt, hinschreiben (vgl. Gl. (61) und (64)):

$$-\Delta\phi = \underbrace{(\gamma G x)}_{\omega(x)} t = \underbrace{(\gamma G t)}_{k(t)} x; \quad (102)$$

und so erhält man

$$\omega(x) \cdot t = k(t) \cdot x. \quad (103)$$

(Die Winkelgeschwindigkeit ω ist hier zu verstehen als gradientenabhängige Geschwindigkeit der Winkeldephasierung.) Natürlich gibt es dann auch einen Zusammenhang von K und T :

$$K = \gamma GT. \quad (104)$$

Da also die Ausdehnung des k -Raums direkt mit der Ortsauflösung zu tun hat, ist es instruktiv, die Spindephasierung in Abhängigkeit vom k -Wert zu betrachten (der ja gleichbedeutend mit dem Anlegen eines Gradienten ist). Der größte auftretende k -Vektor reicht vom Ursprung des k -Raums bis an den Rand, also:

$$|k_{\max}| = \frac{K}{2}; \quad (105)$$

nach Gl. (61) gilt wieder für die Dephasierung der Spins:

$$\Delta\phi = -\gamma G x T = -k x, \quad (106)$$

also:

$$|\Delta\phi_{\max}| = k_{\max} L = \frac{K}{2} L = \frac{\pi}{\Delta x} L = N\pi. \quad (107)$$

Die Spinorientierung unterscheidet sich also von Rand zu Rand um $N\pi$, d.h. zwischen benachbarten Raumbereichen von der Breite der Ortsauflösung beträgt der Unterschied maximal π , siehe Abb. 34.

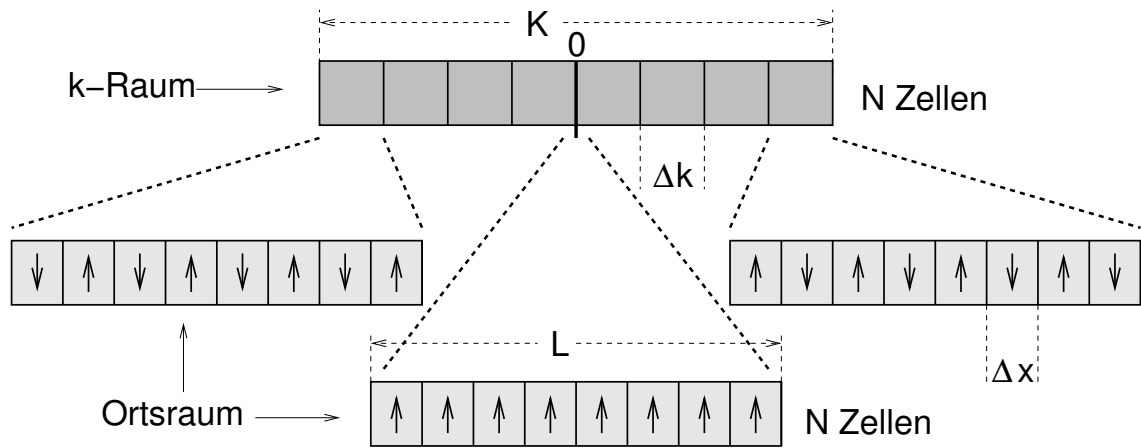


Abbildung 34: Generelle Zuordnung der Spindephasierung im Ortsraum zur entsprechenden Position im k -Raum.

Mit dieser Erkenntnis läßt sich das Prinzip der MR-Bildgebung am ehesten nun auch anschaulich verstehen; hier wird offensichtlich, daß bei der Messung des Gesamtsignals – nach einer gezielten Dephasierung – tatsächlich direkt nach vorkommenden Ortsfrequenzen im Meßobjekt gefahndet wird (siehe Abb. 35):

- Bei einem homogenen Objekt liefert nur der undephasierte Zustand ($k = 0$) ein Signal, da sich nur dann die Magnetisierung konstruktiv addiert; ansonsten mittelt sie sich weg;
- bei einem periodischen Objekt entsteht der wesentliche Signalbeitrag bei der passenden Periodizität der Magnetisierung. (Zusätzlich ergibt sich immer ein Beitrag bei $k = 0$, da dies dem Mittelwert entspricht.)

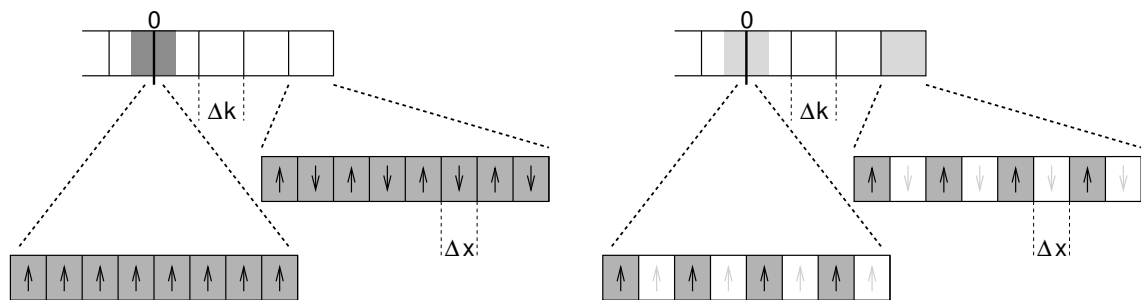


Abbildung 35: Einträge im k -Raum bei einem homogenen und einem periodischen Meßobjekt. Hier zeigt sich auch anschaulich der Zusammenhang von k -Vektor und Ortsauflösung.

5.2 Artefakte und Phänomene

Unter anderem durch die erwähnten Einschränkungen werden Bildstörungen verursacht, die man unter dem Begriff *Artefakte* zusammenfaßt. Dagegen bezeichnen *Phänomene* Effekte, deren Ursprung in der Methode selbst begründet ist. Die Interpretation solcher

Erscheinungen ist nicht nur notwendig zu deren Vermeidung, es ist auch ein guter Test für das korrekte eigene Verständnis.

5.2.1 Aliasing– oder Einfalt–Artefakt

Der Aliasing– oder Einfalt–Artefakt beschreibt genau den oben erwähnten Effekt, daß Strukturen, die über einen Bildrand überstehen, auf der jeweils gegenüberliegenden Seite ins Bild ragen (vgl. Abb. 36). Wie man sehen konnte, ist dies eine Konsequenz des Fourier–Ansatzes, konkret der Gleichung (97).

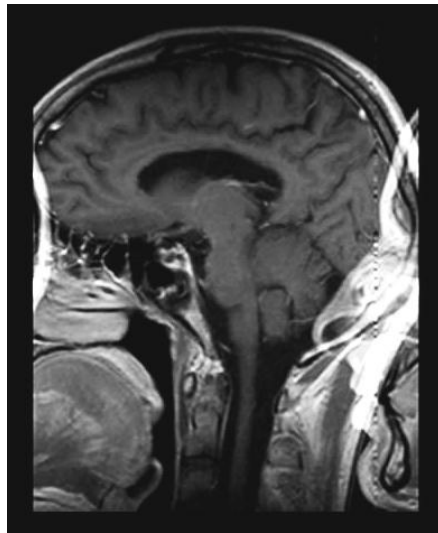


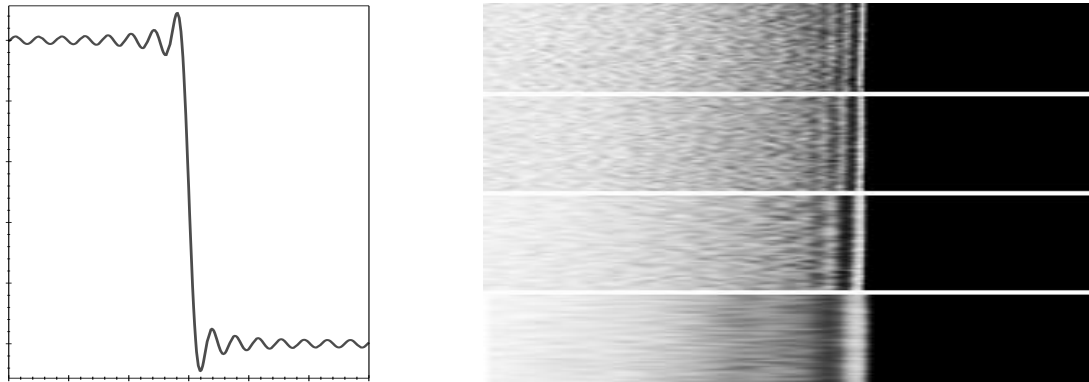
Abbildung 36: Beispiel für einen Einfalt–Artefakt. In Phasenrichtung sind die überstehenden Partien des Kopfes auf der jeweils gegenüberliegenden Bildseite eingeklappt. (Ohne weitere Maßnahme würde auch der Hals vom oberen Bildrand her einfalten.)

Gegenmaßnahmen: Abhilfe kann man schaffen, indem man den k –Raum dichter rastert: Gemäß Gleichung (99) beträgt der Abstand zweier benachbarter Punkte im k –Raum $k_n - k_{n-1} = 2\pi/L$; den Abstand enger zu legen ist somit gleichbedeutend mit der Vergrößerung der Periodizitätslänge L ; die Einfaltungen passieren also entsprechend weiter außen. „Oversampling“ ist dafür der technische Begriff. Diese Technik kann problemlos in Ausleserichtung angewendet werden; die Datenerfassung pro Phasenraumzeile muß dafür nur enger sein, aber das kostet keine zusätzliche Meßzeit. Anders dagegen das Oversampling in Phasenrichtung: Hier vergrößert sich die Zahl der Phasenraumzeilen, d.h. die Zahl der Anregungen und damit die Meßzeit (allerdings dann bei Verbesserung der Bildqualität, siehe Kap. 5.3).

5.2.2 Gibbs–Artefakt

Der Gibbs–Artefakt bezeichnet den Effekt, daß scharfe Kanten (d.h. scharfe Kontrast–sprünge im Bild) durch endliche Fourier–Zerlegung eigentlich nicht approximiert werden

können. An der Stelle der Kante sieht man überhöhte Werte und Oszillationen in deren Umgebung (siehe Abbn. 37(a) und 37(b)). Der Grund dafür ist leicht einsehbar: Um scharfe Übergänge zu approximieren sind genau die hohen Frequenzen (d.h. zentrumsferne k -Werte) notwendig, die man durch die nötige Beschränkung auf einen endlichen Bereich abschneidet, wie dies in Gleichung (96) geschehen ist. Dies tritt vor allem dann auf, wenn durch dieses Abschneiden die Werte nach außen hin *abrupt* abfallen.



(a) Eindimensionale Darstellung des Gibbs-Artefakts (erzeugt durch endl. Fourier-Zerlegung gem. Gl. (96)). (b) Gibbs-Artefakt (vergrößert) an der Brandung eines Wasserphantoms unter verschiedenen Auflösungen (von oben: 60%, 50%, 35%, 20% der Grundauflösung).

Abbildung 37: Der Gibbs-Artefakt – theoretisch und praktisch.

Gegenmaßnahmen: Die Werte im k -Raum können mit einer Glockenkurve (z.B. einer 2dimensionalen Gausskurve) multipliziert werden, was zu einem sanften Auslaufen zu den Rändern hin führt (sog. Apodization-Filter, siehe Kap. 6.7). Das abrupte Fehlen der k -Raum-Werte wird auf diese Weise abgeschwächt. Allerdings verschlechtert sich dadurch die Auflösung.

5.2.3 Bewegungsartefakte, Flußartefakte

Bewegungsartefakte bezeichnen Bildstörungen, die durch Bewegung während der Messung hervorgerufen werden. Bewegte Regionen (z.B. Augapfel bei Kopfuntersuchungen) sind über das gesamte MR-Bild in Phasenrichtung „verschmiert“ (siehe Abb. 38). Dies läßt sich damit erklären, daß bei Bewegung die Phasenkohärenz innerhalb jeder Phasenraumzeile erhalten bleibt, aber die Phasenraumzeilen untereinander durch ihren größeren zeitlichen Abstand ihre Phasenkohärenz verlieren. Oder anders ausgedrückt: Eine Verschmierung nur in Phasenrichtung erfolgt, wenn die Bewegung langsam ist im Vergleich zur Messung einer k -Raum-Zeile.

Ähnliche Phänomene können auftreten bei instabiler Steuerelektronik des Gerätes.

Gegenmaßnahmen: Entweder man versucht zu erreichen, daß die sich bewegende Region gar kein Signal sendet (Sättigungspulse, minimale Zahl der verwendeten Spulenelemente), und/oder die Phasenrichtung wird so gewählt, daß die dann noch sichtbaren Artefakte dort auftreten, wo sie nicht stören (wie in Abb. 38).

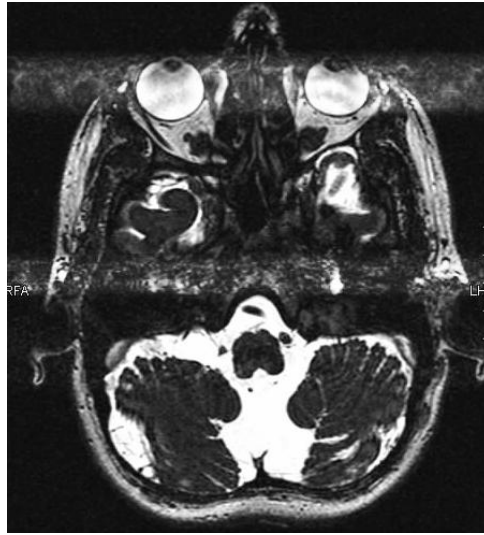


Abbildung 38: Beispiel für Bewegungsartefakte. Die Bereiche der bewegten Augen und einiger Gefäße sind in Phasenrichtung verschmiert. Es macht deshalb in diesem Fall Sinn, als Phasenrichtung links/rechts zu wählen. (Eine kurze Bewegung des Kopfes würde die gesamte Messung verderben.)

Flußartefakte sind sicherlich die interessanteste Form der Bewegungsartefakte: Unter der Annahme einer laminaren Strömung können sich neben einer reinen Bildstörung weitere Effekte ergeben, die je nach Flußgeschwindigkeit, Flußrichtung und verwendeter Sequenz in einer Signalanhebung oder -abschwächung resultieren; dies kann z.B. speziell zur Gefäßdarstellung ausgenützt werden.

Gegenmaßnahmen: Zur Vermeidung von Bildstörungen durch Flußartefakte gibt es spezielle Techniken (z.B. *gradient motion rephasing*), dabei handelt es sich um drei aufeinanderfolgende Gradientenpulse, die insgesamt eine von der Flußgeschwindigkeit unabhängige Rephasierung bewirken. Außerdem kann durch spezielle Sättigungspulse das störende Signal des fließenden Blutes weggesättigt werden.

5.2.4 Chemische Verschiebung

Das Phänomen der Chemischen Verschiebung beruht auf der Tatsache, daß Protonen in Fettgewebe (Wasserstoff gebunden an Kohlenstoff) und Protonen in Wasser (Wasserstoff gebunden an Sauerstoff) durch ihre unterschiedliche Umgebung ein leicht verschieden starkes äußeres Magnetfeld spüren. Folglich besitzen sie eine leicht voneinander verschobene Resonanzfrequenz: Der relative Unterschied beträgt 3.5ppm (z.B. bei einem 1.5Tesla-Gerät unterscheiden sich beide Stoffe um ca. 220Hz). Dies macht sich in MR-Bildern durch eine gegenseitige Verschiebung des Fett- und des Wasserbildes *in Ausleserichtung* bemerkbar (siehe Abb. 39) und führt u.U. zu einem reliefartigen Eindruck. (Genaugenommen muß noch berücksichtigt werden, daß diese beiden Bilder nicht aus der völlig gleichen Schicht stammen.)

Die Größe dieser gegenseitigen Verschiebung von Fett- und Wasserbild läßt sich leicht berechnen; dazu kann man so tun, als gelte für Fett ein leicht verändertes gyromagneti-

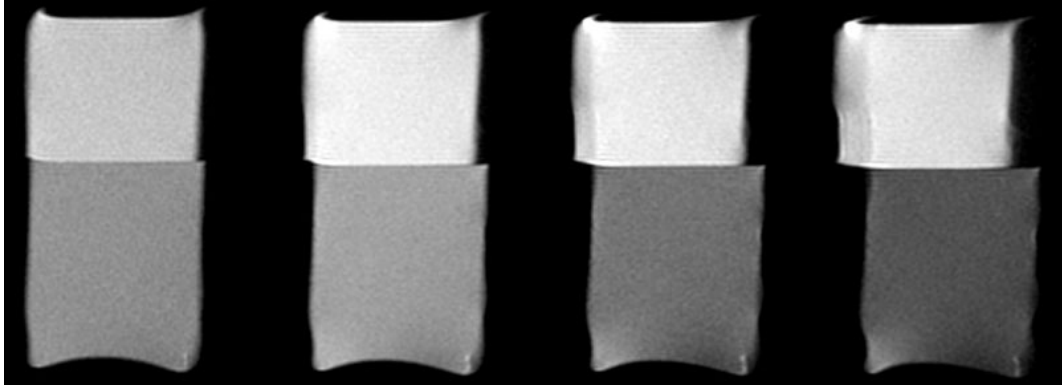


Abbildung 39: Chemische Verschiebung zwischen Fett und Wasser bei 1.5 Tesla Magnetfeldstärke. Das Fett in der oberen Phase verschiebt sich zunehmend in Ausleserichtung mit abnehmender Auslesebandbreite. Im Bild beträgt die verwendete Auslesebandbreite (v.l.n.r.) 100Hz/Pixel, 50Hz/Pixel, 30Hz/Pixel, 20Hz/Pixel.

ches Verhältnis γ_F (vgl. Gl. (2)): $\gamma_F = \gamma + \Delta\gamma$, mit $\Delta\gamma = 3.5 \cdot 10^{-6}\gamma$. Für die Larmor-Winkelgeschwindigkeit ω_L erhält man so:

$$-\omega_L = (\gamma + \Delta\gamma)(B_0 + Gx) = \underbrace{\gamma B_0}_{-\omega_0} + \underbrace{\gamma Gx}_{-\omega(x)} + \underbrace{\Delta\gamma \cdot B_0}_{-\Delta\omega_F} + \underbrace{\Delta\gamma \cdot Gx}_{\approx 0}; \quad (108)$$

Für die Werte $S(k)$, wie sie bei der Messung im k -Raum festgehalten werden, ergibt sich so ein zusätzlicher Phasenfaktor:

$$e^{-i\Delta\omega_F t} = e^{-i\Delta x_F \gamma G t} = e^{-i\Delta x_F k}.$$

Bei der anschließenden Rücktransformation zum Bild $\sigma(x)$ läßt sich direkt der Verschiebungssatz (siehe Gl. (139)) anwenden, und so folgt:

$$S(k) \longrightarrow S(k) \cdot e^{-i\Delta x_F k} \bullet \circ \sigma(x - \Delta x_F). \quad (109)$$

Die Chemische Verschiebung im Bild ist damit also (vgl. Gl. (103)):

$$\Delta x_F = \frac{\Delta\omega_F}{\gamma G}. \quad (110)$$

Es ist allerdings informativer, wenn diese Verschiebung in Relation zur Auslesebandbreite $\Delta\nu$ und in Einheiten von Pixeln der Bildauflösung Δx angegeben wird; dazu wird Gl. (104) invertiert:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\gamma G T} \implies \frac{\Delta x}{2\pi} = \frac{1}{\gamma G} \Delta\nu, \quad (111)$$

und man erhält schließlich (mit $\Delta\nu_F = \Delta\omega_F/(2\pi)$):

$$\frac{\Delta x_F}{\Delta x} = \frac{\Delta\nu_F}{\Delta\nu}. \quad (112)$$

So beträgt die Verschiebung beispielsweise bei einem 1.5T-Gerät mit $\Delta\nu_F = 220\text{Hz}$ und bei einer Sequenz mit einer Auslesebandbreite von $\Delta\nu = 110\text{Hz/Pixel}$ gerade 2 Pixel.

Da die chemische Verschiebung auf der Unterschiedlichkeit der Resonanzfrequenzen beruht, tritt dieser Artefakt sowohl bei Gradienten-, als auch bei Spinechosequenzen auf.

Gegenmaßnahmen: Um die Chemische Verschiebung klein zu halten, bietet sich eigentlich nur die Verwendung von Sequenzen mit großer Auslesebandbreite an. Dadurch verschlechtert sich allerdings die Bildqualität (siehe Kap. 5.3). Eine andere Möglichkeit besteht in der völligen Vermeidung des Fettbildes durch Techniken der Fettunterdrückung (spektrale Absättigung, inversion-recovery-Techniken).

5.2.5 black-boundary-Phänomen

Das black-boundary-Phänomen ist ebenfalls eine Folge der unterschiedlichen Resonanzfrequenzen: Liegt ein Gemisch aus Fett und Wasser vor (speziell bei Übergängen von fett- zu flüssigkeitsreichem Gewebe), dann können dort Fett- und Wasserbild in ihrer Phase um π (bzw. um ein ungeradzahliges Vielfaches davon) differieren; die Folge ist, daß es dort zu Signalauslöschungen kommt, man also dunkle Strukturen sieht, wo eigentlich keine sein sollten (siehe Abb. 40). Dies tritt häufig an Gewebeberandungen auf, deshalb diese Bezeichnung.

Da es bei diesem Effekt auf relative Phasenlagen ankommt, macht hier der 180° -Rephasierungspuls von Spinechosequenzen (Kap. 4.2) *den* entscheidenden Unterschied; der black-boundary-Artefakt kommt also nur bei Gradientenechosequenzen (Kap. 4.1) vor.

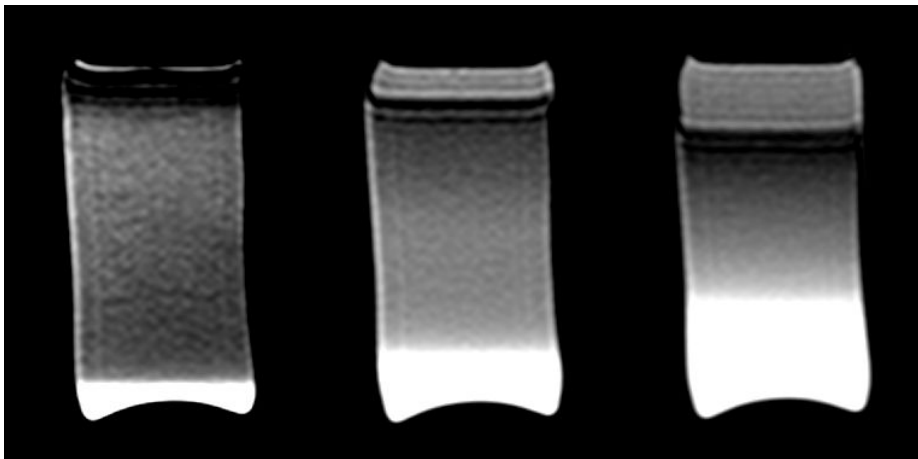


Abbildung 40: Auslöschung der Phasen von Fett- und Wassersignal. Verwendet wurde hier das selbe Messphantom wie in Abb. 39, nur anfangs stark geschüttelt, um eine Vermischung von Fett und Wasser zu erreichen. Abgebildet sind die Stadien der Entmischung nach verschiedenen Zeiten (ca. je eine Minute, fortschreitend von links nach rechts). Das sehr helle Signal des Wassers stammt von einer Anreicherung mit Kontrastmittel (Gadolinium). Verwendet wurde eine Echozeit $TE=2.38\text{ms}$, um bei einem 1.5T-Gerät eine Phasendifferenz von π zu erreichen.

Zur Gewebedifferenzierung kann man diesen Effekt aber auch bewußt ausnutzen:

Durch den relativen Frequenzunterschied von $3.5 \cdot 10^{-6}$ (siehe Kap. 5.2.4) kann mittels Gleichungen (8) und (9) der Phasenunterschied $\Delta\phi$ in Abhängigkeit von der Echozeit TE berechnet werden, der ein ganzzahliges Vielfaches m von π sein soll:

$$\Delta\phi = TE \cdot \Delta\omega_F = TE \cdot 3.5 \cdot 10^{-6} \gamma B_0 \stackrel{!}{=} m\pi. \quad (113)$$

Damit es also zu diesem Effekt kommt, muß die Echozeit gewählt werden als

$$TE = \begin{cases} \frac{(2n-1)\pi}{3.5 \cdot 10^{-6} \gamma B_0} \implies \text{Auslöschung} \\ \frac{2n\pi}{3.5 \cdot 10^{-6} \gamma B_0} \implies \text{Verstärkung} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (114)$$

Die typischen Echozeiten sind kurz; es sind nur kleine Werte von n sinnvoll.

5.2.6 Metall- bzw. Suszeptibilitätsartefakte

Der Suszeptibilitätsartefakt bezeichnet den Umstand, daß durch unterschiedliche Suszeptibilitäten der Gewebe innerhalb der untersuchten Region das Grundmagnetfeld nicht mehr hinreichend homogen ist; es ergeben sich substanzabhängige Mikrogradienten G_μ . Die Folge davon sind Dephasierung und lokale Auslöschungen im Bild.

Ähnlich in der Ursache, aber schlimmer in der Wirkung sind Artefakte durch Metall. Da Metalle eine höhere Suszeptibilität besitzen, kommt es zu Auslöschungen in Kombination mit Verzerrungen, die dann besonders stark sind, wenn es sich um ferromagnetische Materialien handelt (Abb. 41).

Für diesen Effekt genügt übrigens alleine schon der Umstand, daß Materialien elektrisch leitend sind; dann induzieren darin die Gradienten Wirbelströme, die ihrerseits ein entgegengesetztes Magnetfeld erzeugen (Lenz'sche Regel). Zusätzlich kann es dabei zu Aufheizungen kommen, was für sich genommen ein Sicherheitsrisiko darstellt; davon sind auch so „unverdächtige“ Dinge wie Lidschatten oder Tätowierungen betroffen.

Gegenmaßnahmen: Bis zu einem gewissen Grad kann der MR-Tomograph dem Effekt der Feldverzerrung aktiv (durch *Shim-Spulen*, vgl. Kap. 3.1) entgegenwirken.

Nach [13] beträgt die Dephasierung $\Delta\phi$ innerhalb eines Voxels der Größe Δx durch die Mikrogradienten (vgl. Gl. 61):

$$\Delta\phi = \gamma G_\mu \cdot \Delta x \cdot TE. \quad (115)$$

Gegenmaßnahmen sind also – neben der Verwendung von Spinechosequenzen (wegen des 180°-Rephasierungspulses) – eine kurze Echozeit TE (soweit möglich) und eine kleine Voxelgröße Δx (siehe Abb. 42). Außerdem kann es bei massiven Problemen hilfreich sein, die Untersuchung mit einem Niederfeldgerät durchzuführen.

5.2.7 Dritter-Arm-Artefakt

Hier macht sich bemerkbar, daß die Gradienten außerhalb des Meßvolumens wieder steil abfallen. Es kann deshalb bei der Schichtenanregung vorkommen, daß außer der eigentlichen

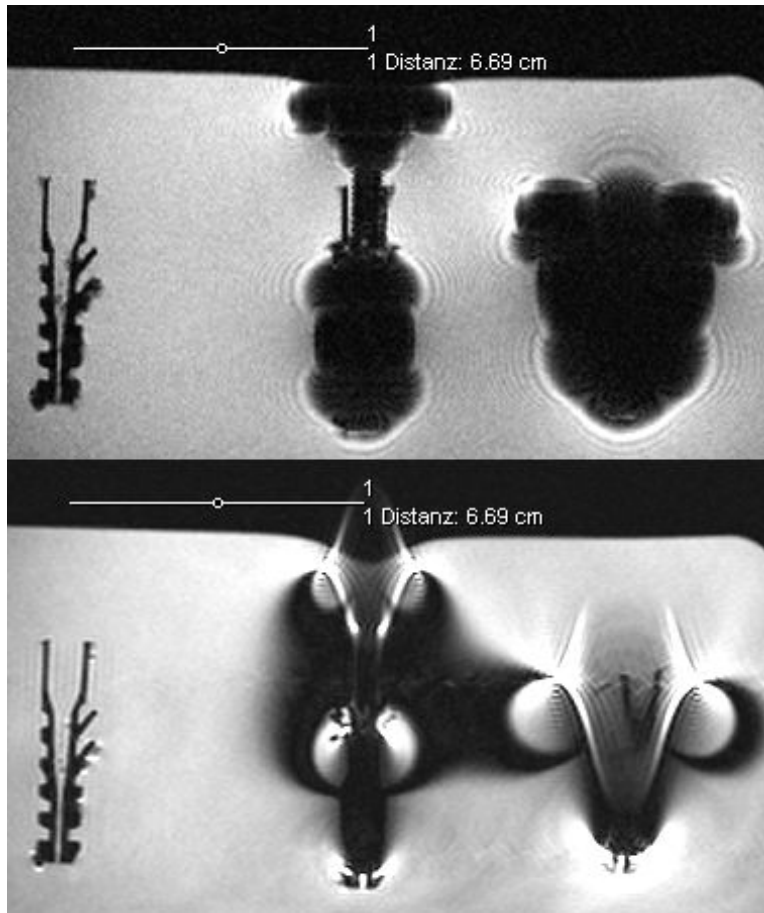


Abbildung 41: Suszeptibilitäts- und Metallartefakte bei einer Gradientenechosequenz (oben) und einer Spinechosequenz (unten). Gezeigt sind jeweils drei Kunststoffdübel in Wasser: Ein Dübel alleine (links), ein Dübel mit einer 5cm langen Titanschraube (mitte), wie sie für medizinische Zwecke verwendet wird, ein Dübel mit einem knapp 1mm^3 großen ferromagnetischen Partikel (rechts). Vor allem bei der Gradientenechosequenz machen sich schon beim alleinigen Dübel die Suszeptibilitätsartefakte in Form von Auslöschungen bemerkbar.

Schicht noch ein weiterer Bereich weit außen angeregt wird (siehe Abb. 43). Dessen Signal macht sich dann im Bild meistens als unförmiger Klecks bemerkbar. Es kann kurioserweise aber auch vorkommen, daß ganz andere als die untersuchten Körperteile zusätzlich im Bild auftauchen; so kam wohl dieser Artefakt zu seinem Namen.

Gegenmaßnahmen: Es sollte darauf geachtet werden, daß das Signal des störenden äußeren Bereiches erst gar nicht empfangen wird, d.h. es sollten – z.B. bei großflächigen Wirbelsäulenspulen – nur die tatsächlich benötigten Spulenelemente am Ort der Messung verwendet werden.

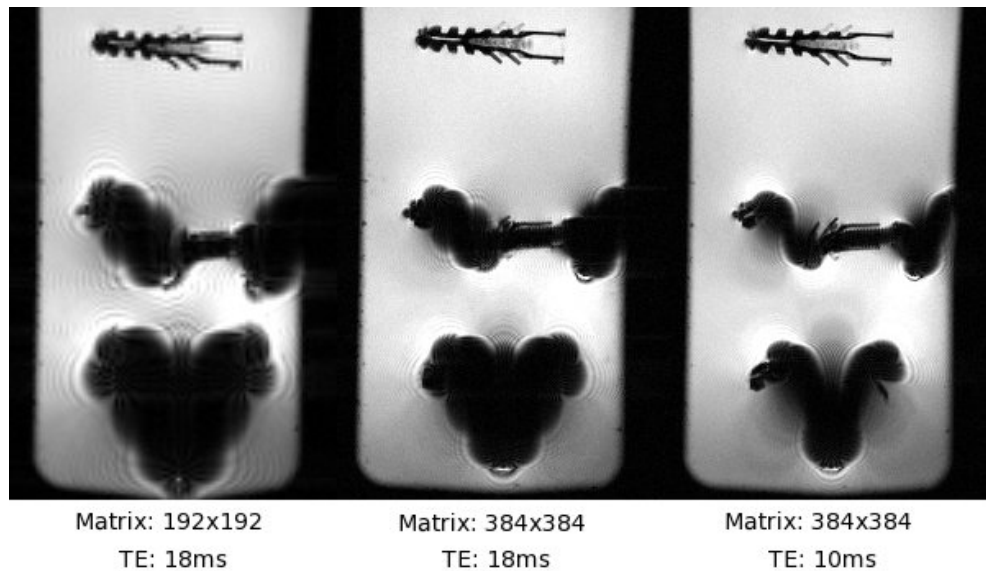


Abbildung 42: Suszeptibilitäts- bzw. Metallartefakte bei einer Gradientenechosequenz in Abhängigkeit von Auflösung und Echozeit. Verwendet wurde dasselbe Phantom wie in Abb. 41; gezeigt ist ein „Referenzbild“ (mitte), ein Bild mit größeren Voxel (links), bzw. eines mit verkürzter Echozeit (rechts).

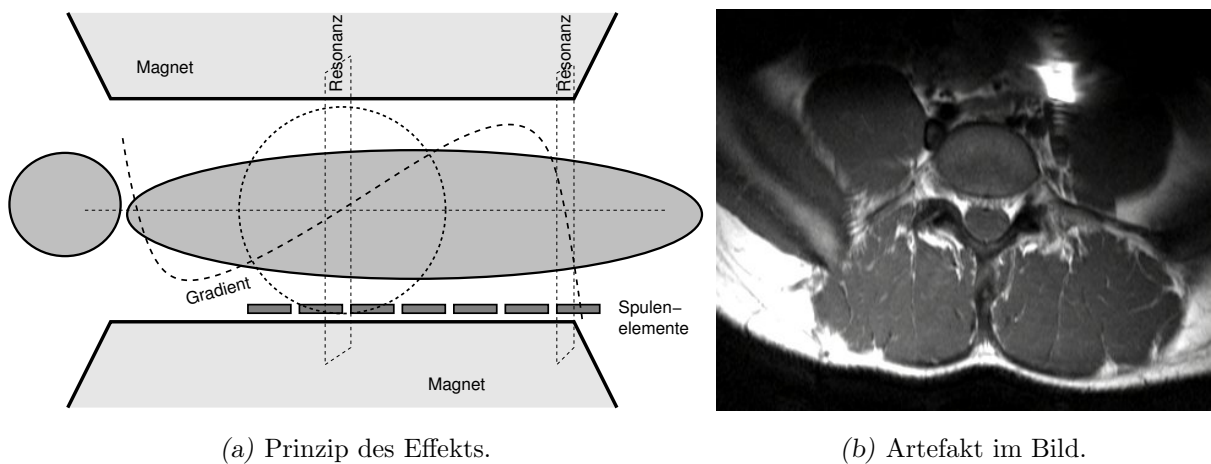


Abbildung 43: Dritter-Arm-Artefakt. Außerhalb der Homogenitätskugel fällt der Gradient steil ab, und so können bestimmte Bedingungen für Gradienten in weiteren als dem beabsichtigten Raumbereich erfüllt sein (vgl. Abb. 12).

5.2.8 Spikes

Spikes sind Hochfrequenzstörungen, meist hervorgerufen durch statische Entladungen im Untersuchungsraum. Dadurch ergeben sich zusätzliche einzelne Peaks zufällig irgendwo im k -Raum; ein einzelner Peak im k -Raum charakterisiert eine ebene Welle (mit konkreter Richtung und Frequenz) im Bildraum (analog zu Abb. 27). Spikes führen also nach der Rücktransformation zu einem relativ regulären Muster, mit dem das Bild überlagert ist, siehe Abb. 44.

Gegenmaßnahmen: Lockere Teile am/im MR-Gerät und an den Spulen sollten



Abbildung 44: Bildstörungen durch Spikes. Das Bild ist mit einem regulären Wellenmuster überlagert.

vermieden werden. Außerdem sollte man auf hinreichende Luftfeuchtigkeit (zur Vermeidung von statischen Aufladungen) und intakte Glühlampen (kein Flackern!) im Untersuchungsraum achten.

5.2.9 Zipper–Artefakt

Der Zipper–Artefakt kommt zustande durch HF–Einstrahlung von außerhalb des Untersuchungsraumes. Der Untersuchungsraum besitzt deshalb typischerweise ein HF–Abschirmung; wenn diese aber ungenügend ist, oder wenn während der Messung die Türen geöffnet wird, kann es durch Radiosender, Handys, etc. zu solchen Störungen kommen.

Sei vereinfachend das Signal einer solchen Einstrahlung charakterisiert durch

$$S_E := A_E \exp(i\omega_E t). \quad (116)$$

Bei der Messung addiert sich dieses Signal zum Kernspinsignal, und wegen der Linearität der Fouriertransformation ergibt sich schließlich im Bild ebenfalls eine Addition von Kernspinbild und „Störbild“. Für jede Phasenraumzeile erhält man also einen Zusatzterm $A_E \exp(i(\omega_E - \omega_0)t)$; (der Faktor $\exp(-i\omega_0 t)$ ergibt sich daraus, daß von der Signalfrequenz ja immer die Resonanzfrequenz ω_0 abgezogen wird, da nur die relativen Phasen relevant sind). Der Term $(\omega_E - \omega_0)t$ muß noch „übersetzt“ werden, wie er sich im k –Raum darstellt:

$$(\omega_E - \omega_0)t \stackrel{!}{=} k \cdot \Delta_E x = \gamma G_R t \Delta_E x \quad \Rightarrow \quad \Delta_E x = \frac{\omega_E - \omega_0}{\gamma G_R} \quad (G_R : \text{Auslesegradient}); \quad (117)$$

d.h. im Bild (nach Fourier–Transformation) findet man durch die Störung zusätzlich (vgl. Gl. (161)):

$$A_E \int e^{-ik(x - \Delta_E x)} dk \quad \sim \quad A_E \delta(x - \Delta_E x). \quad (118)$$



Abbildung 45: Bildstörungen durch externe HF–Einstrahlung. In Phasenrichtung zieht sich eine Spur durch das Bild, ähnlich einem Reißverschluß.

Insgesamt zeigt sich also durch diese Störung eine Linie, die in Phasenrichtung verläuft und um Δ_{Ex} vom Ursprung versetzt ist (Abb. 45). Das externe HF–Störsignal und die k –Raum–Abtastung sind zwar nicht korreliert, aber da beides periodische Vorgänge sind, kann es zu einem Moiré–Effekt kommen, was dazu führt, daß dieser linienartige Artefakt ein Muster zeigen kann, das an einen Reißverschluß (engl.: zipper) denken läßt.

5.2.10 ADC–Überlauf

Der ADC–Überlauf ist bedingt durch fehlerhafte Skalierung bei der Umwandlung des analogen Kernspinsignals in ein digitales: Vor der eigentlichen Messung findet immer ein Abgleich statt, bei dem (unter anderem) versucht wird das zu erwartende Signalmaximum abzuschätzen. Mißlingt dies, werden u.U. die Meßwertspitzen gekappt. Diese Meßwertspitzen liegen typischerweise im Zentrum des k –Raums (wegen dort geringster Dephasierung), in dem die langwelligsten, bzw. konstanten Bildanteile festgelegt sind. Im Bild führt dies dann zu einem Effekt, der sich wie ein Grauschleier darstellt (Abb. 46). Der ADC–Überlauf kommt bei neueren Geräten eigentlich nicht mehr vor.

Möglich ist auch der umgekehrte Effekt: Ein fehlerhafter offset (konst. Wert) in den Fourier–Daten führt zu einem einzelnen fehlerhaften Punkt bzw. Fleck in der Mitte der Bilddaten.

5.2.11 Magic–Angle–Phänomen

Die gegenseitige Beeinflussung der Spins trägt bei zur Dephasierung, also zur T_2 –Relaxation. Entscheidend sind dabei nur jeweils die z –Komponenten der Spins, die sich

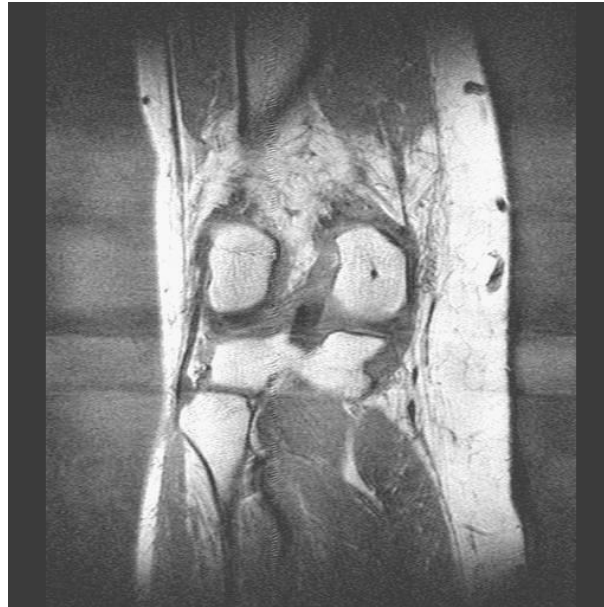


Abbildung 46: ADC-Überlauf-Artefakt. Das Bild ist mit einem Grauschleier überlagert.

beeinflussen; dafür gilt das gleiche Argument, wie es bei der Vernachlässigung der xy -Komponenten bei den Gradienten gebraucht wurde, siehe Gln. (56)–(58). Jeder Spin ist dann einem leicht unterschiedlichen B_z -Feld ausgesetzt und besitzt somit eine geringfügig veränderte Resonanzfrequenz, was eben zur Dephasierung des Kollektivs führt (vgl. Kap. 4.3). Könnte also die Wechselwirkung der z -Komponenten abgeschwächt werden, dann wäre eine Verlängerung der T_2 -Zeit – und damit eine Aufhellung im Bild – die Folge. Dies kann unter bestimmten Umständen tatsächlich auftreten.

Betrachtet man die z -Komponenten der Spins als Dipole (siehe Kap. C), dann fällt mit Blick auf das Aussehen des Feldes eines Dipols in Abb. 70 sofort auf, daß unter einem bestimmten Winkel die z -Komponente des Dipolfeldes verschwindet. Aus Gl. (218) läßt sich dieser sog. „magische“ Winkel sofort angeben:

$$B_z^{\text{Dipol}} \sim 3 \cos^2 \vartheta - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \implies \quad \vartheta = \arccos \sqrt{1/3} \approx 0.955 \approx 54.7^\circ. \quad (119)$$

Der Effekt tritt also ein, wenn die Spins einheitlich in der Richtung des magischen Winkels zum Hauptfeld – und nur in dieser Richtung – angeordnet sind, siehe Abb. 47. Dies kann der Fall sein in Collagen-Strukturen, wie sie – hochgeordnet – in Sehngewebe vorkommen; man spricht hier von „struktureller Anisotropie“, vgl. [14]. Die Sehne muß dazu im magischen Winkel zum Hauptfeld orientiert sein.

In medizinischen Kernspinbildern tritt dieser Effekt eher diskret in Erscheinung und ist wohl nicht einfach von anderen Effekten zu unterscheiden. Die resultierende T_2 -Verlängerung macht sich hauptsächlich nach kurzen Echozeiten, also z.B. in T_1 -Bildern, bemerkbar ([14]). Um den Effekt möglichst in Reinform bildlich herauszuarbeiten, wurden hier tierische Sehnen um eine Rolle gewickelt, und diese Rolle mit ihrer Achse senkrecht zum Hauptfeld im Gerät orientiert. Das Sehnenmaterial durchläuft so alle Winkel relativ zum Feld. Das Ergebnis ist in Abb. 48 dargestellt; der Effekt zeigt sich in den schwachen

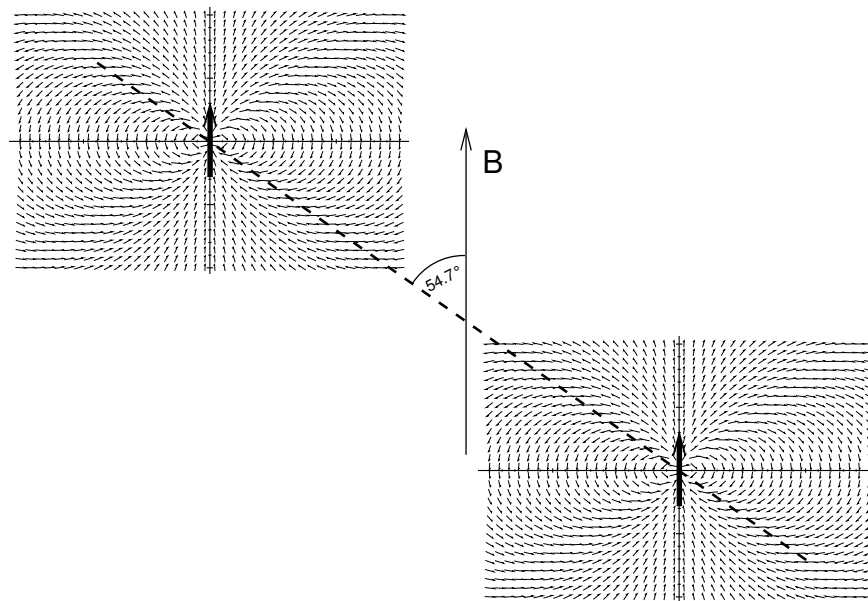


Abbildung 47: Prinzip des Magic-Angle-Phänomens. Unter einem bestimmten Winkel verschwinden die z -Komponenten; bei entsprechender gegenseitiger Orientierung findet somit über die z -Komponenten keine Wechselwirkung statt.

Aufhellungen, die dann auftreten, wenn die Sehne jeweils den richtigen Winkel zum Feld einnimmt.

5.2.12 Nichtlinearität der Gradienten

Bei einer Abweichung der Gradienten von der notwendigen Linearität handelt es sich eigentlich nicht um einen Artefakt im üblichen Sinn. Vielmehr wird dies von Herstellern u.U. bewußt so realisiert, um speziell bei Geräten mit besonders schnellen und starken Gradienten den Gradientenhub unterhalb einer zulässigen Schwelle zu halten. (Die Geschwindigkeit und die Stärke der Gradienten hat direkt mit möglichen Nervenstimulationen beim Patienten während einer Messung zu tun, da dadurch Wirbelströme induziert werden (vgl. Kap. 7.2).

Die Gradienten flachen nach Außen hin also ab, bevor die Grenze des Bildbereiches erreicht ist. Dies führt dazu, daß außenliegende Bereiche zunehmend nach innen verzerrt werden (Abb. 49).

Typischerweise wird dieses „Feature“ nicht besonders hervorgehoben. Bei Unzufriedenheit seitens der Betreiber wird auf die Möglichkeit der Verwendung von Korrekturalgorithmen verwiesen, die freilich nur der Optik dienen: Aus guten Gründen kann/darf auf den „korrigierten“ Bildern nichts vermessen und keine weiteren Messungen geplant werden; außerdem ist die Bildebene selbst gekrümmt, und das kann grundsätzlich nicht weggerechnet werden.

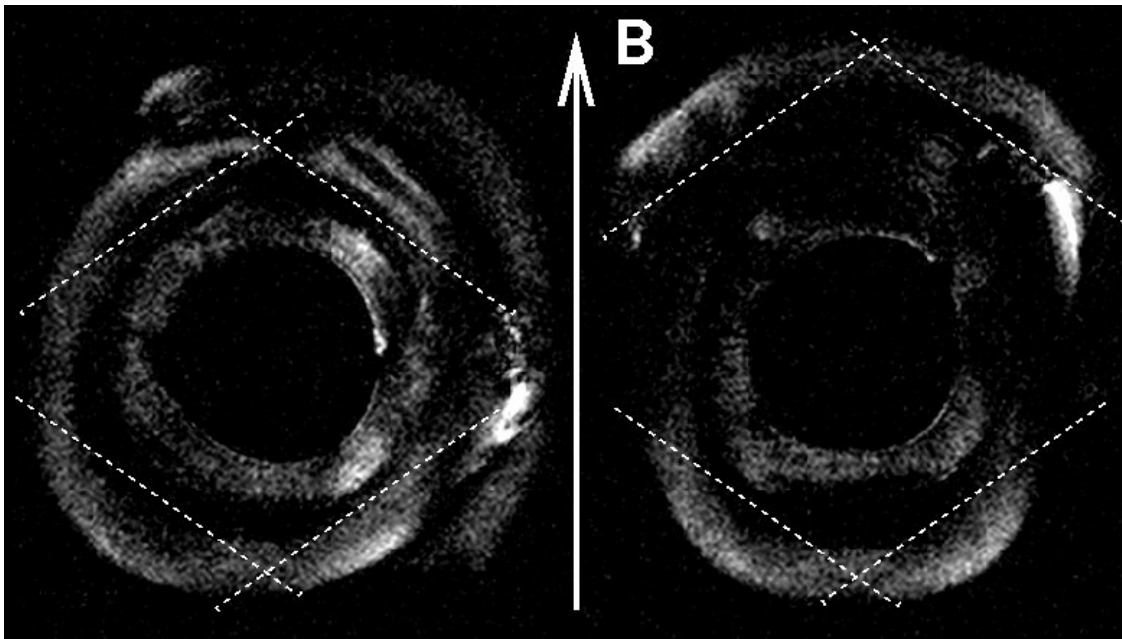


Abbildung 48: Magic-Angle-Phänomen in Sehngewebe ($T1$ -Gradientenecho-Sequenz). Das Phantom besteht aus Sehnen, die auf eine Rolle gewickelt sind. Gezeigt ist ein Schnitt senkrecht zur Wicklungsachse. Die beiden Bilder stammen aus zwei identischen Messungen am selben Phantom; zwischen den Messungen wurde das Phantom aber in der Bildebene um ca. 40° gedreht, um Strukturen, die stets ein starkes Signal geben (z.B. Fett, jeweils rechts), identifizieren zu können. Das Sehngewebe an sich ist äußerst signalarm; unter dem „magischen Winkel“ (relativ zum Feld, gestrichelte Linien) ergeben sich aber die Signalanhebungen. (Der Durchmesser des Phantoms beträgt ca. 5cm.)

5.3 Bildqualität, Bildrauschen

Wie schon in Kap. 2.3 angedeutet, ist das Kernspinsignal sehr schwach. Bei einer MR-Messung ist es deshalb wichtig, die Relation der Signalstärke zum „Rauschhintergrund“ im Auge zu behalten; diese Größe wird mit S/N („signal to noise“) bezeichnet. Im routinemäßigen Umgang ist weniger der absolute Wert dieser Größe relevant (außer zur Qualitätssicherung), sondern vielmehr dessen relative Veränderung in Abhängigkeit von veränderten Meßparametern.

Neben weiteren Größen wird die Bildqualität ganz wesentlich durch die folgenden beeinflusst:

Das Volumen der Voxel: (Voxel: Elementare Volumeneinheit = Pixelgröße \times Schichtdicke) Innerhalb eines Voxels addieren sich die Signalintensitäten der einzelnen Spins konstruktiv zum Gesamtsignal des Voxels. Die Signalintensität ist deshalb proportional zum Volumen V des Voxels: $S/N \sim V$

Die Zahl der Messungen an einem Voxel: Durch Mehrfachmessungen an einem Voxel verbessert sich die Signifikanz des Voxelsignals auf statistische Weise. Gemäß

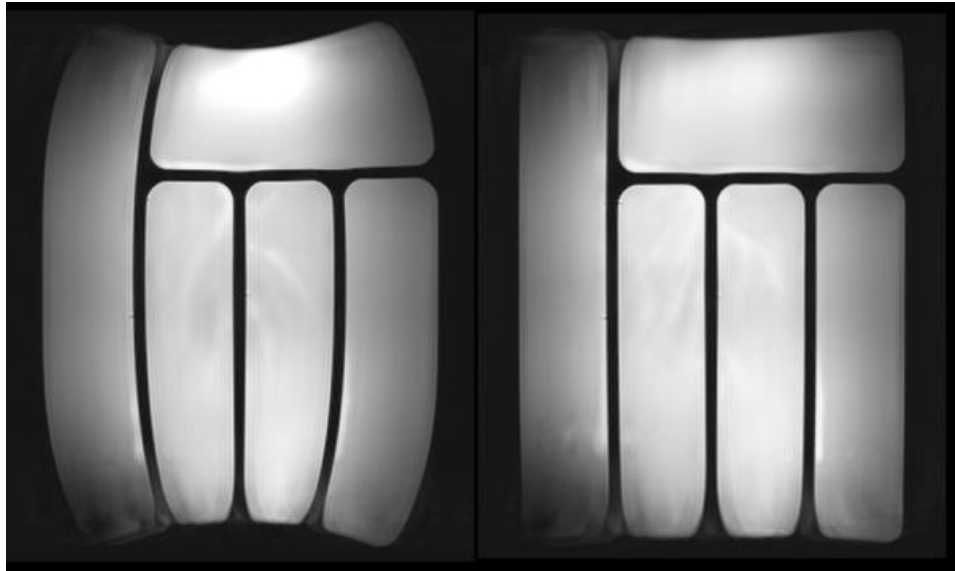


Abbildung 49: Bildverzerrung durch nichtlineare Gradienten (links). Das gemessene Phantom besteht aus rechteckigen Strukturen! Durch Korrekturalgorithmen kann das Bild „verschönert“ werden (rechts).

der allgemeinen Statistik gilt der wohlbekannte Zusammenhang (z.B. [11]): Besitzt eine verrauschte Meßgröße nach einer einzigen Messung die Schwankungsbreite σ_1 , dann verringert sich nach M Messungen die Schwankungsbreite, d.h. die Unsicherheit bzgl. des wahren Mittelwertes, auf

$$\sigma_M = \frac{1}{\sqrt{M}} \sigma_1. \quad (120)$$

Entsprechend erhöht sich das S/N proportional zur Wurzel aus der Zahl M der Einzelmessungen: $S/N \sim \sqrt{M}$

(Die Zahl der Messungen an einem Voxel ergibt sich aus der Zahl der gescannten Phasenraumzeilen, einschließlich evtl. Oversampling (vgl. Aliasing-Artefakt); zusätzlich sind zur Verbesserung der Bildqualität noch Mehrfachmessungen pro Schicht möglich.)

Die Auslesebandbreite: Die Bandbreite $\Delta\nu$ ist gerade der Kehrwert der Zeit T zum Auslesen eines Echos (siehe Gl. (101)). Mit dem gleichen statistischen Argument wie bei den Mehrfachmessungen an einem Voxel erhält man $S/N \sim \sqrt{T}$. Damit folgt für die Auslesebandbreite: $S/N \sim 1/\sqrt{\Delta\nu}$.

Die Magnetfeldstärke, bzw. Arbeitsfrequenz: (Die Magnetfeldstärke ist kein Parameter in dem Sinn, daß man sie direkt einstellen könnte. Die Überlegungen sind vor allem beim Vergleich von Geräten verschiedener Feldstärke relevant.) Die Leistung an einer Empfangsantenne wächst in etwa linear mit ω (z.B. [7]); außerdem nimmt die Nettomagnetisierung ebenfalls linear mit ω zu (vgl. Gl. 44). Damit ergibt sich für das Signal: $S \sim \omega^2$. Andererseits nimmt auch die Stärke des Rauschens zu: $N \sim \omega^a$ mit $a \in [1 \dots 2]$. In grober Näherung findet man also: $S/N \sim \omega$.

Die Meßparameter TR und TE : Da sich die $T1$ - und $T2$ -Bildkontraste direkt über die zeitliche Schwächung des Voxelsignals definieren, ist hier der Zusammenhang mit dem S/N evident; das Signalverhalten in Abhängigkeit von den Meßparametern ergab sich aus Gln. (67) bzw. (78). So wäre beispielsweise bei einer „vollkommenen“ $T1$ -Wichtung wegen des kurzen TR alles Gewebe weggesättigt, während bei einer „vollkommenen“ $T2$ -Wichtung wegen des langen TE weitgehende Dephasierung eingetreten ist.

6 Reduktion der Meßzeit, elegante Tricks, etc.

Die ersten der hier gezeigten Möglichkeiten und Methoden sind ganz wesentlich für die praktische und routinemäßige Durchführbarkeit der Kernspintomographie. In aller Regel werden sie kombiniert eingesetzt. Allerdings ist zu beachten, daß es sich hier nur um die Beschreibung der Grundprinzipien handelt; Details sind oft genug „Betriebsgeheimnis“ der Hersteller.

6.1 Multischichtmessung

MR-Messungen bestehen normalerweise nicht aus einzelnen Bildern bzw. Schichten, sondern es wird stets ein ganzer Block von Schichten aufgenommen. Diese Schichten werden nicht einzeln gescannt, sondern man nutzt die notwendige Wartezeit (TR) vor jeder Anregung einer bestimmten Schicht, um weitere Schichten anzuregen und dafür die zugehörigen Phasenraumzeilen zu scannen (siehe Abb. 50). Ist die Zeit TR als Wartezeit

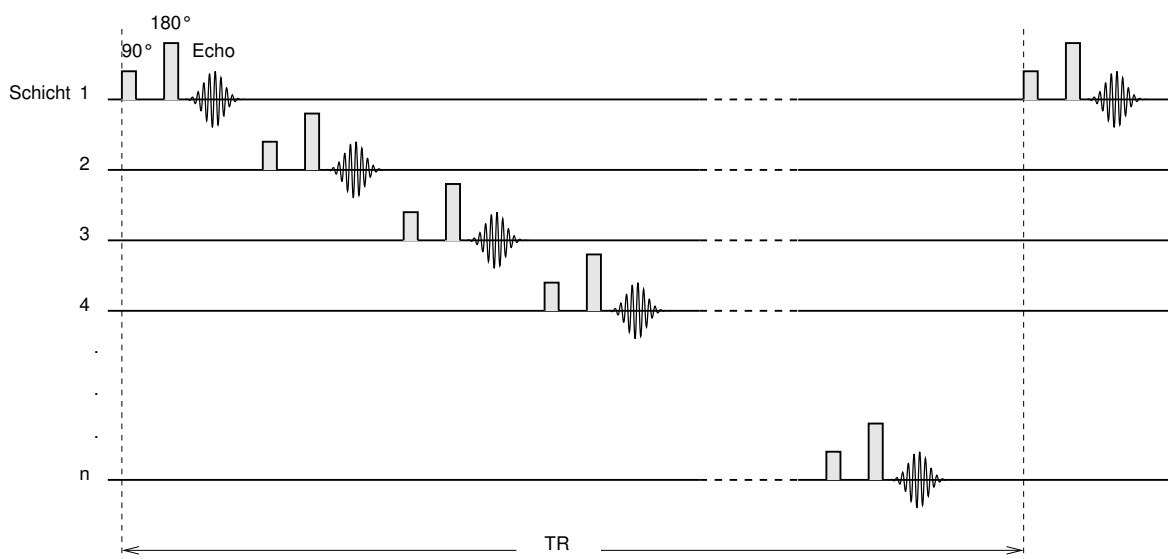


Abbildung 50: Schema einer Multischichtmessung am Beispiel einer Spinechosequenz.

für die erste Schicht verstrichen, muß hier wieder die nächste Anregung erfolgen. Hieraus resultiert ein enger Zusammenhang zwischen TR und der maximal möglichen Zahl der Schichten in einem Block.

Da so quasi gleichzeitig an allen Schichten gemessen wird, folgt auch, daß durch eine kurze Bewegung des Patienten während der Messung alle Schichten von Bewegungsartefakten betroffen sind.

6.2 Multiechosequenztechnik

Das Prinzip von Mehrfachecho-Sequenzen beruht auf der Erkenntnis, daß nach der Abfolge von Anregung und Empfang des Echos aus einer Schicht, diese Schicht immer noch angeregt ist, und sich mittels Rephasierung weitere Echos erzeugen lassen. Dies eröffnet die

Möglichkeit, mit einer einzigen Anregung gleich mehrere Phasenraumzeilen abzutasten, und also die Messung so um ein Vielfaches zu beschleunigen. Dieser Beschleunigungsfaktor – auch als Echozuglänge oder sportlich als „Turbofaktor“ bezeichnet – entspricht der Zahl der Echos pro Anregung; üblich sind Echozuglängen bis in die Größenordnung von ca. 20. (Als Extremfall gibt es aber auch sog. *single-shot-Sequenzen*, bei denen mit einer einzigen Anregung pro Schnittbild gearbeitet wird.) Damit nicht Bereiche verschiedener Echos genau in der k -Raum-Mitte aneinander grenzen, ist es sinnvoll stets eine ungerade Zahl von Echos zu verwenden.

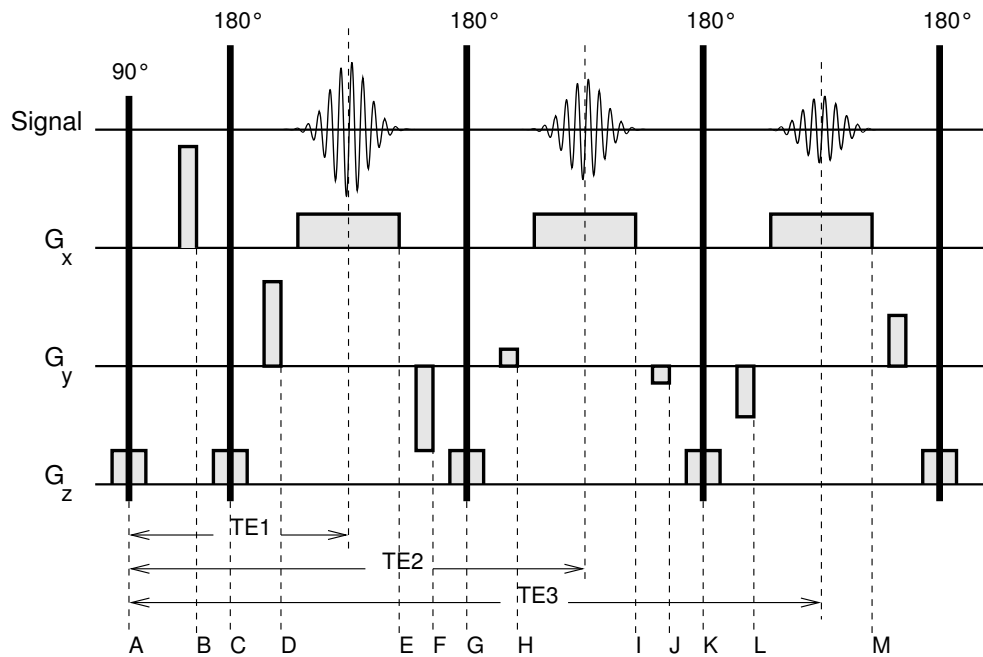


Abbildung 51: Schema einer Multiechomessung mit einer Echozuglänge von Drei am Beispiel einer Spinechosequenz.

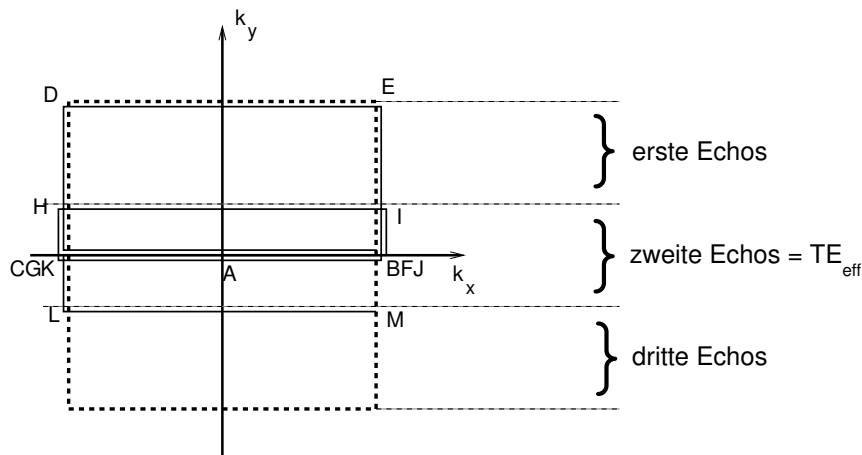


Abbildung 52: Mögliche Art der Abtastung im k -Raum bei Multiechosequenzen (schematisch). Mit den Echos weiterer Anregungen werden die Zeilen dazwischen erfaßt. Die Reihenfolge der Zeilen kann – je nach geforderter effektiver Echozeit TE_{eff} – anders gewählt werden.

Eine Möglichkeit dies zu realisieren ist in Abb. 51 am Beispiel einer Spinecho-Sequenz

skizziert. Die zugehörige Bewegung im k -Raum ist in Abb. 52 gezeigt.

Von den nun mehreren Echozeiten TE_i ist diejenige entscheidend für den Kontrast, deren zugehöriges Echo in das Zentrum des k -Raums fällt (siehe Kap. 5.1.2); dies wird als *effektive Echozeit* bezeichnet. In der Realisierung gilt aber eher die Umkehrung: Zur gewünschten effektiven Echozeit muß das Zentrum des k -Raums gescannt werden; abhängig von der Zahl und dem zeitlichen Abstand der Echos entscheidet dies, ob die Phasengradienten linear oder irregulär fortgeschaltet werden. Ein lineares Fortschalten des Phasengradienten ist sinnvoll, da dann größere Intensitätssprünge im k -Raum vermieden werden (siehe „Gibbs-Artefakt“).

Durch Multiecho-Sequenzen lassen sich auch elegant Mehrfach-Kontraste erzeugen: Bei langer TR werden z.B. zwei k -Raum-Datensätze angelegt, nämlich einer mit den frühen Echos und einer mit den späten. So lassen sich mit einer einzigen Messung z.B. PD- und T2-gewichtete Bilder gewinnen.

Es muß aber ganz deutlich betont werden, daß die hier gezeigte Methodik nur das Grundprinzip skizziert; würden diese Sequenzen genau so realisiert werden, wären sie anfällig für eine Reihe von Artefakten (Nebenechos, stimulierte Echos, siehe [9]). Tatsächlich sind diese Sequenzen also wesentlich komplizierter und trickreicher aufgebaut.

Multiecho-Techniken funktionieren im Prinzip auch mit Gradientenecho-Sequenzen; allerdings erfolgt hier die k -Raum-Abtastung meist nach einer kontrastbestimmenden Spinpräparation.

6.3 3D-Sequenztechnik

Wie schon aus den Gleichungen (91) und (92) hervorgeht, gibt es bei der Fourier-Transformation keine Beschränkung bzgl. der Dimensionalität; insbesondere können also auch 3D-Datensätze gewonnen und in den Bildraum transformiert werden.

Vom Prinzip her unterscheidet sich die 3D-Bildgebung nicht von der 2D-Bildgebung; lediglich an Stelle des Schichtselektionsgradienten wird ein weiterer Phasenkodiergradient geschaltet, um einen 3dimensionalen k -Raum-Block zeilenweise aufzufüllen (siehe Abb. 53). Es ist zu beachten, daß in jeder der drei Raumrichtungen die Gefahr des Einfaltens (Aliasing Artefakt, siehe Kap. 5.2.1) besteht; als Gegenmaßnahme gibt es die Möglichkeit einer selektiven Anregung. Da nun erheblich mehr Zeilen gemessen werden müssen, kommen im Wesentlichen Gradientenechosequenzen zum Einsatz.

Diese Technik ist vorteilhaft durch ihre höhere Auflösung und durch das Fehlen von Schichtlücken. (Bei der 2D-Bildgebung läßt man normalerweise Lücken zwischen den Schichten in der Größenordnung von 10% der Schichtdicke, da das Schichtprofil nicht perfekt rechteckig ist, und man Störungen durch Schichtüberlapp vermeiden will.) Die 3D-Bilddatensätze lassen sich weiterverarbeiten für multiplanare Rekonstruktionen oder Intensitätsprojektionen, z.B. bei Angiographien.

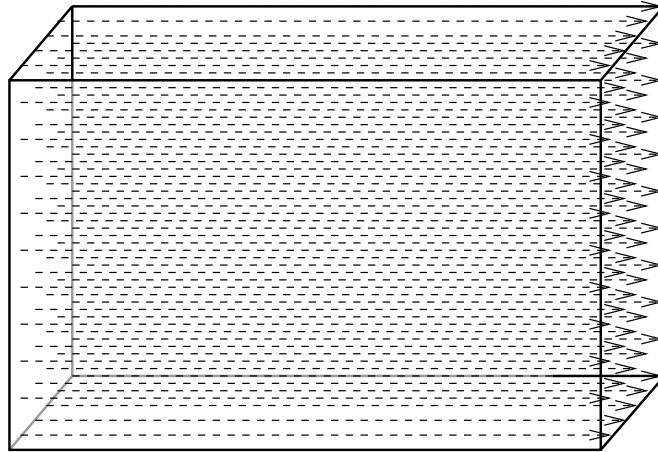


Abbildung 53: Schema des zeilenweisen Auffüllens eines 3D-Datenblocks im k -Raum. Es gibt hier zwei Phasenkodierrichtungen und eine Ausleserichtung, dafür aber keine Schichtselektion.

6.4 Half-Fourier-Technik

Wie oben beschrieben, ist die Fourier-Transformation eine komplexwertige Transformation; die Daten bestehen immer aus zwei Komponenten. Tatsächlich liefert ein MR-Tomograph auch stets zwei Bilder eines Schnittes: Ein Betragsbild und ein Phasenbild. In Abb. 54 ist dies am Beispiel eines sagittalen T2-gewichteten Schnittes durch den Schädel gezeigt; die „eigentlichen“ MR-Bilder sind die Betragsbilder.

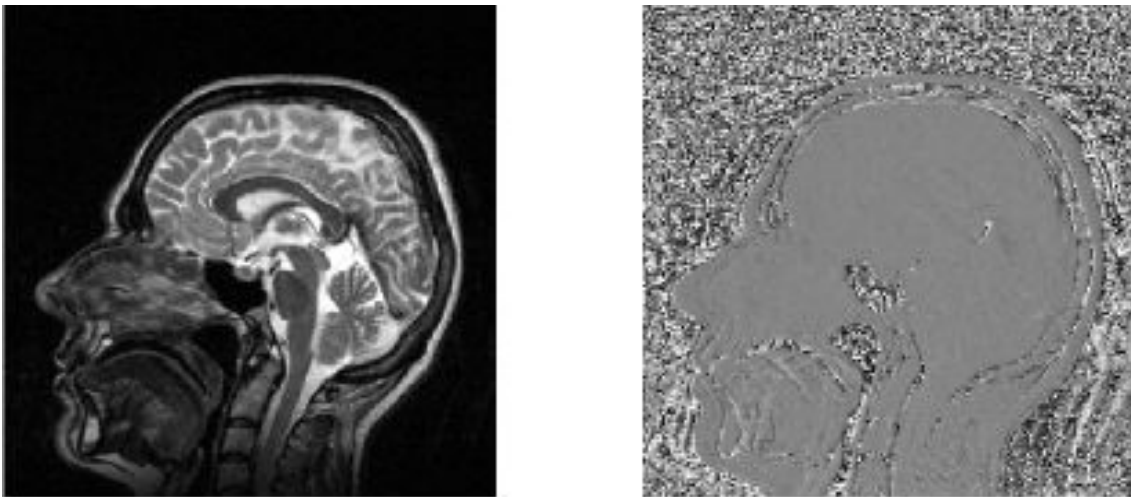


Abbildung 54: Das grundsätzliche Ergebnis einer MR-Messung nach der Rücktransformation (Schädel, T2, sagittal): Ein Betragsbild (links) und ein Phasenbild (rechts); der Phasenwinkel ist dabei in Graustufen kodiert. Das „Schneegeister“ im Phasenbild rührt von einer zufälligen Phasenverteilung her (da dort kein Signal); Bewegungsartefakte werden deshalb dort am ehesten sichtbar.

Dieser Umstand, daß von den beiden Bildkomponenten nur eine relevant ist, läßt sich zur Reduktion der Meßzeit nutzen:

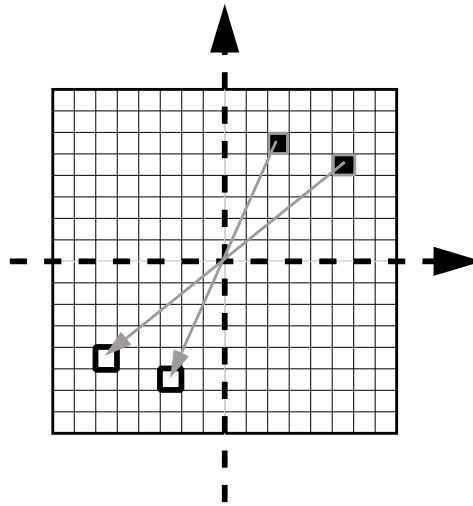


Abbildung 55: Die Symmetrie des k -Raums bei rein reellwertigem Ortsraum: Der Wert an einem Punkt ist zu dem an seinem punktsymmetrischen Spiegelbild komplex konjugiert.

Geht man bereits davon aus, daß das zu erstellende Bild rein reellwertig ist, dann liegt notwendigerweise eine bestimmte Symmetrie im k -Raum vor (vgl. Gleichung (65)):

$$S(\vec{k}) = \int \sigma(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^2x; \quad \sigma(\vec{x}) \in \mathbb{R} \text{ (Bild reellwertig);} \quad \implies \quad S(-\vec{k}) = S^*(\vec{k}). \quad (121)$$

Ist also der Wert an einem Punkt im k -Raum bekannt, kennt man sofort auch den Wert des Punktes, der dazu punktsymmetrisch zum Ursprung liegt: Die Werte sind zueinander komplex konjugiert. Dies ist in Abb. 55 skizziert. Für die Bildgebung genügt es dann also grundsätzlich, nur eine Hälfte des k -Raums zu kennen, die andere kann daraus rekonstruiert werden.

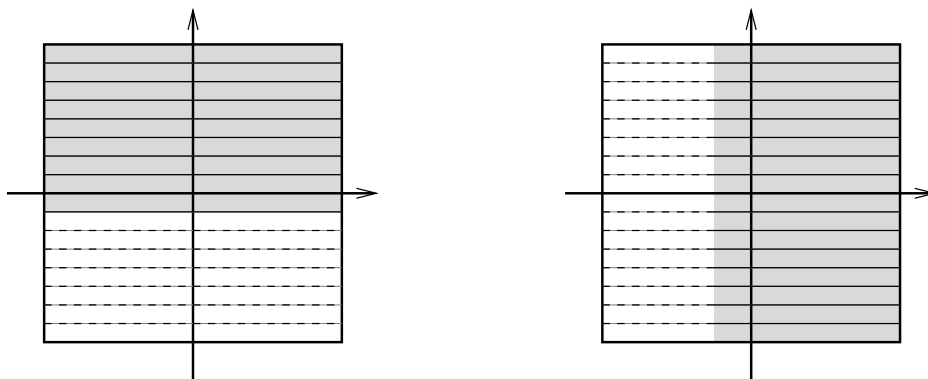


Abbildung 56: Mögliche Anwendungen der Half-Fourier-Technik: Reduktion der Zahl der gescannten Zeilen (links), oder Reduktion der Zeilenlänge (rechts).

Diese Tatsache kann einerseits dazu verwendet werden, die Zahl der Phasenraumzeilen, d.h. die Zahl der Anregungen und damit die Meßzeit auf die Hälfte zu reduzieren (tatsächlich nimmt man etwas mehr als die Hälfte). Natürlich kann man auch deut-

lich mehr als die Hälfte abschnitten („Partial-Fourier“). Andererseits können die Phasenraumzeilen selbst verkürzt werden. Diese Technik der sog. *asymmetrischen Echos* kann angewendet werden, wenn bei Multiechosequenzen die Zeit für die Einzelechos (der sog. „Echoabstand“) verkürzt werden muß oder sehr kurze Echozeiten gefordert sind, siehe Abb. 56.

In der Praxis ist die Anwendung der Half-Fourier-Technik nicht immer möglich oder sinnvoll: Die Bildqualität verschlechtert sich dadurch (siehe Kap. 5.3), es gibt Sequenzen, die den k -Raum irregulär abtasten, oder die Phaseninformation wird explizit benötigt (z.B. bei Flußquantifizierung oder bei Phasenkontrast-Angiographien).

6.5 Parallele Datenakquisition (PAT)

Die parallele Datenakquisition (parallel acquisition technique) als Verfahren zur Meßzeitreduktion setzt nicht auf Beschleunigung der Datenakquisition, sondern beruht auf einer Reduktion des Meßaufwands selbst; es wird nämlich nur jede R -te (z.B. 2. oder 3.) k -Raum-Zeile gemessen. Größere Auflösung im k -Raum hat aber einen verkleinerten Bildausschnitt zur Folge, d.h. es werden sich Einfaltungen ergeben (siehe Gl. (99)).

Die eigentliche Idee hinter diesem Verfahren besteht nun darin, die Datenakquisition mit mehreren Spulenelementen parallel vorzunehmen, was ermöglicht, daß die erzeugten Einfaltungen rückgängig gemacht werden können (siehe z.B. [15]). Diese „Ausfaltung“ der Bilder ist grundsätzlich auf zwei verschiedene Weisen durchführbar: Noch im k -Raum, oder – nach der Fourier-Transformation – im Bildraum.

Entscheidend für die Durchführbarkeit ist in jedem Fall, daß mehrere Spulenelemente (d.h. unabhängige Empfangsantennen) an der Messung beteiligt sind; diese Spulenelemente haben ihr eigenes ortsabhängiges Empfindlichkeitsprofil $C(x, y)$ (siehe Abb. 57). Oft wird in diesem Zusammenhang auch von „Ausleuchtung“ gesprochen; dieser Begriff ist zwar anschaulich, darf aber nicht wörtlich genommen werden, da es hier nur um die Empfangscharakteristik der Spulenelemente geht.

Folgende Eigenheiten sollten vor der Verwendung dieser Technik bekannt sein:

- Ausfaltungen im k -Raum funktioniert punktweise (siehe unten), d.h. Datenfehler werden übertragen;
- Ausfaltung im Bildraum kommt nicht zurecht mit *echten* Einfaltungen (d.h. wenn im Schnittbild – wie es ursprünglich geplant ist – bereits Einfaltungen enthalten sind);
- die Messung wird empfindlicher gegenüber Bewegung;
- bei einem Beschleunigungsfaktor R sinkt das S/N um *mehr* als den Faktor \sqrt{R} (vgl. Kap. 5.3), da noch ein Geometriefaktor berücksichtigt werden muß;

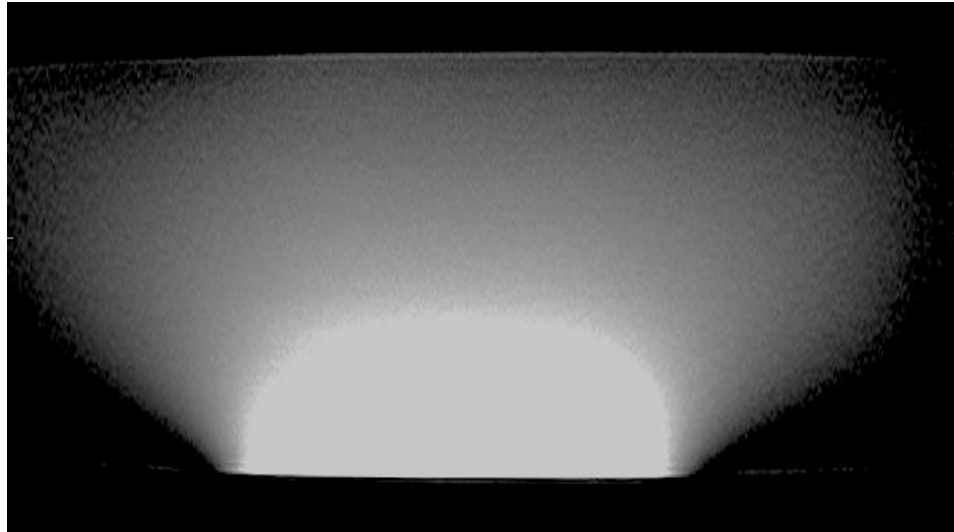


Abbildung 57: Beispiel für einen nur begrenzt „ausgeleuchteten“ Bereich in einem Wasserphantom durch ein einzelnes Spulenelement. Diese Ortsabhängigkeit wird mit dem Empfindlichkeitsprofil $C(x, y)$ mathematisch beschrieben. (Die Fensterung wurde so gewählt, daß auch das Auslaufen des Empfindlichkeitsprofils sichtbar ist, deshalb ist der zentrale Bereich massiv überstrahlt.)

- durch die Zusatzmessungen zur Bestimmung der Empfindlichkeitsprofile und Koeffizienten (siehe unten) fällt der Zeitgewinn (merklich) geringer aus, als der Begriff „Beschleunigungsfaktor“ vorgibt;
- die Schichtorientierungen können nicht mehr beliebig gewählt werden: Die Phasenrichtung *muß* in Richtung der verschiedenen Spulenprofile zeigen;
- bei Single-Shot-Techniken (siehe Kap. 6.2) kann PAT einen echten Gewinn bringen, da hier die Echozuglänge erheblich kürzer gehalten werden kann.

Die Verwendung der PAT-Technik sollte also gut begründet sein.

6.5.1 Ausfaltung im k -Raum

Gemäß Gleichung (65) läßt sich das Signal aus einer angeregten Schicht schreiben als

$$S(\vec{k}) = \int \sigma(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^2x; \quad (122)$$

dies ist aber eine Idealisierung, die nur bei *gleichmäßiger* „Ausleuchtung“ des untersuchten Bereiches gilt. Tatsächlich muß das Empfindlichkeitsprofil des jeweiligen Spulenelements ebenfalls berücksichtigt werden. Bei Messung mit mehreren Spulenelementen gilt dann für das Signal jedes Elements (mit Index j) einzeln:

$$S_j(\vec{k}) = \int C_j(\vec{x}) \sigma(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^2x. \quad (123)$$

Diese Signale werden einzeln gemessen; das Gesamtsignal $S(\vec{k})$ läßt sich daraus linear-kombinieren:

$$S(\vec{k}) = \sum_j a_j S_j(\vec{k}) = \sum_j a_j \int C_j(\vec{x}) \sigma(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^2x = \int \left(\sum_j a_j C_j(\vec{x}) \right) \sigma(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^2x. \quad (124)$$

Erreicht man nun, daß für eine Linearkombination der Empfindlichkeitsprofile gilt:

$$\sum_j a_j C_j(x, y) = e^{i\Delta k \vec{x}}, \quad (125)$$

dann folgt für das so gebildete Gesamtsignal in Gl. (124):

$$S(\vec{k}) = \int \sigma(\vec{x}) e^{-i(\vec{k} - \Delta \vec{k})\vec{x}} d^2x; \quad (126)$$

wenn $\Delta \vec{k}$ gerade einen Differenzvektor zwischen gemessenen und nicht gemessenen Punkten im k -Raum darstellt, bedeutet das, daß man die nicht gemessenen Werte aus den gemessenen *berechnen* kann.

Zur Meßzeitverkürzung werden ganze k -Raum-Zeilen weggelassen; der Vektor $\Delta \vec{k}$ zeigt also sinnvollerweise genau in Phasenrichtung. An Standard-MR-Geräten erreicht man durch PAT allenfalls eine Beschleunigungsfaktor von 2 (ohne Verwendung vom dedizierten Mehrkanal-PAT-Spulen); deshalb soll dieses Beispiel näher betrachtet werden:

Beim Weglassen jeder 2ten Zeile sind die für die Rekonstruktion nötigen Differenzvektoren (in Phasen- bzw. y -Richtung, vgl. Gl. (99) und Abb. 58):

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}(2n - 1); \quad \left(\text{also: } \frac{2\pi}{L}, \frac{2\pi}{L/3}, \frac{2\pi}{L/5}, \dots \right). \quad (127)$$

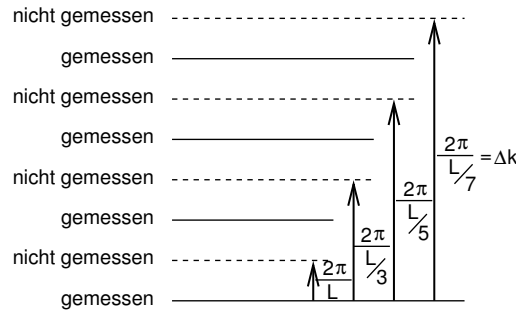


Abbildung 58: Mögliche Differenzvektoren im k -Raum zur Berechnung der nicht gemessenen Zeilen.

Bei Verwendung von geeigneten Differenzvektoren läßt sich offenbar der Phasenfaktor mit den beiden Spulenprofilen linear-kombinieren:

$$a_1 C_1(x, y) + a_2 C_2(x, y) \approx e^{i\Delta k \cdot y}. \quad (128)$$

Für diese Methode müssen die Spulenempfindlichkeitsprofile C_j explizit bekannt sein, z.B. mittels dafür eigens durchgeführter Scans. Zur Berechnung der komplexwertigen

Koeffizienten a_j gibt es eine Reihe von Techniken; eine Möglichkeit besteht in der Messung einiger direkt benachbarter Zeilen (typischerweise in k -Raum-Mitte) und Aufstellung eines Gleichungssystems durch Gegenüberstellung mit den dafür berechneten Werten.

6.5.2 Ausfaltung im Bildraum

Bei dieser Methode wird ebenfalls nur jede R -te Zeile im k -Raum gemessen und danach – für jedes Spulenelement einzeln – die Fourier-Transformation durchgeführt. Die Bilder haben also eine reduzierte Länge in Phasenrichtung und enthalten Einfaltungen.

Bei Vorliegen von Einfaltungen hängt die jeweilige Bildintensität $I_j(x, y)$ nicht nur vom Produkt $C_j(x, y)\sigma(x, y)$ ab, sondern auch von den Bildintensitäten der $(R - 1)$ überlagerten Bilder:

$$\begin{aligned} I_j = & C_j(x, y)\sigma(x, y) + \\ & + C_j(x, y + \Delta y)\sigma(x, y + \Delta y) + \\ & + C_j(x, y + 2\Delta y)\sigma(x, y + 2\Delta y) + \cdots + \\ & + C_j(x, y + (R - 1)\Delta y)\sigma(x, y + (R - 1)\Delta y); \end{aligned} \quad (129)$$

$\Delta y := L/R$ bezeichnet dabei die Aliasing-Distanz. Wenn M die Zahl der verwendeten Spulenelemente bezeichnet, dann existieren insgesamt M Gleichungen nach Art von Gl. (129). In Form einer Vektor-Gleichung lassen sie sich geschlossen hinschreiben:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(x, y) & C_1(x, y + \Delta y) & \cdots & C_1(x, y + (R - 1)\Delta y) \\ C_2(x, y) & C_2(x, y + \Delta y) & \cdots & C_2(x, y + (R - 1)\Delta y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_M(x, y) & C_M(x, y + \Delta y) & \cdots & C_M(x, y + (R - 1)\Delta y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(x, y) \\ \sigma(x, y + \Delta y) \\ \vdots \\ \sigma(x, y + (R - 1)\Delta y) \end{pmatrix},$$

oder kurz als

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}\sigma; \quad (130)$$

Gesucht wäre nun einfach eine Lösung von Gl. (130) der Form $\sigma = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}$. Die Größe \mathbf{C} repräsentiert i.A. aber eine nicht-quadratische $R \times M$ -Matrix, die nicht so einfach invertiert werden kann. Zudem ist wegen $R \leq M$ dieses Gleichungssystem in aller Regel überbestimmt, d.h. die Zahl M der unabhängigen Gleichungen ist größer als die Dimensionalität R des Lösungsvektors σ . Strenggenommen ist dafür keine Lösung möglich, aber für die praktische Anwendung kann man sich mit dem „besten Kompromiß“ zufrieden geben, der alle Gleichungen gleichermaßen *näherungsweise* erfüllt. Standardmäßig bietet sich hier eine Methode der *linearen kleinsten Quadrate* [12] an:

Auf beide Seiten von Gl. (130) wird die transponierte Matrix \mathbf{C}^T angewendet:

$$(\mathbf{C}^T\mathbf{C})\sigma = \mathbf{C}^T\mathbf{I}. \quad (131)$$

Die quadratische $(R \times R)$ -Matrix $(\mathbf{C}^T\mathbf{C})$ kann invertiert werden, wenn $R \leq M$ ist, wie es ja auch sein soll; außerdem müssen sich die Spulenempfindlichkeitsprofile hinreichend unterscheiden, da sonst $\det(\mathbf{C}^T\mathbf{C})$ verschwindet.

Eine Lösung könnte dann also lauten: $\sigma = (\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{I}$.

6.6 Fourier–Interpolation

Die Fourier–Interpolation (auch „Zero–filling–Interpolation“ genannt) fällt sicherlich in die Kategorie der „eleganten Tricks“. Bei dieser Technik handelt es sich nicht um eine Interpolation fehlender Werte im k –Raum, sondern um eine Manipulation im k –Raum, die zu einer Interpolation im Ortsraum führt.

Das Wesentliche dieses Verfahrens besteht darin, daß für den zu berechnenden Bild-datensatz eine höher aufgelöste Bildmatrix zugrunde gelegt wird, als eigentlich gemessen wurde. Für den k –Raum bedeutet diese höhere Auflösung die Einbeziehung äußerer k –Raum–Zeilen, die man aber eben nicht kennt; diese k –Raum–Bereiche werden deshalb mit dem Wert 0 aufgefüllt (siehe Abb. 59). Solange man kontinuierlich rechnet, ergibt sich

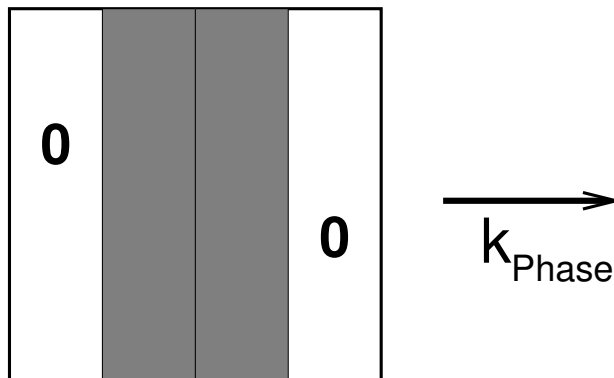


Abbildung 59: Bei der Fourier–Interpolation wird nur die zentrale Hälfte des k –Raum–Bereichs gemessen, der der zugrundegelegten Auflösung entspricht. Der restliche Teil wird mit dem Wert 0 aufgefüllt.

daraus keinerlei Konsequenz. Der Effekt ist alleine auf die Diskretisierung zurückzuführen (nur hier macht ja „Auflösung“ überhaupt erst Sinn).

Grundsätzlich muß man sich den gemessenen k –Raum vorstellen als Produkt des unendlich großen „tatsächlichen“ k –Raums und einer Rechtecksfunktion, die im gemessenen Bereich den Wert 1, ansonsten den Wert 0 hat. Hier läßt sich der Faltungssatz (siehe Kap. A.3) anwenden, also besteht das letztendliche Bild immer aus der Faltung des „perfekten“ Bildes mit der der Auflösung entsprechenden sinc–Funktion (siehe Kap. A.4). Deshalb läßt sich das Prinzip dessen, was hier geschieht, folgendermaßen darstellen (und gleichzeitig in einem vereinfachten eindimensionalen Beispiel betrachten):

1. ursprüngliche, grobe Digitalisierung des „perfekten“ Bildes (Abb. 60);
2. Übergang zu doppelter Auflösung, d.h. der Wert jedes Pixels wird auf zwei Pixel mit je halber Größe übertragen;
3. Digitalisierung der entsprechenden sinc–Funktion in der höheren Auflösung, wobei die sinc–Funktion selbst mit der ursprünglichen Auflösung – gem. Gl. (180) – korrespondiert (Abb. 61;)

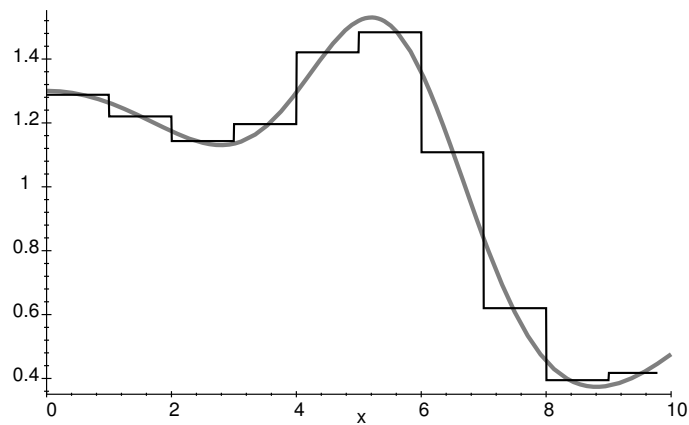


Abbildung 60: Grobe Digitalisierung einer Funktion. Die Auflösung beträgt gerade eine Längeneinheit.

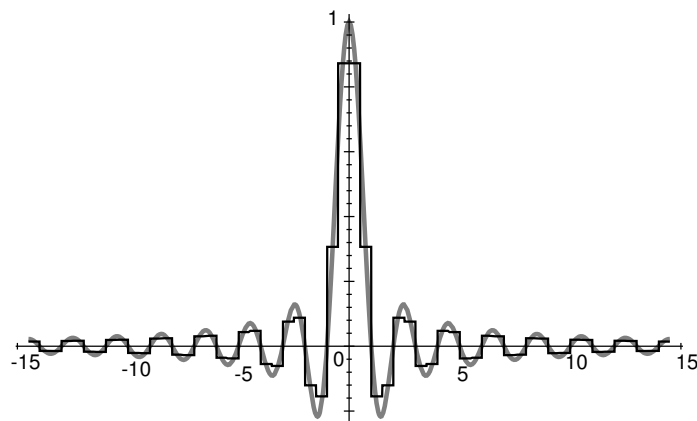


Abbildung 61: Digitalisierung der sinc-Funktion in feiner Auflösung (halbe Längeneinheit); die sinc-Funktion selbst entspricht der ursprünglichen, groben Auflösung.

4. Faltungsprozedur unter Zugrundelegung der höheren Auflösung (Abb. 62).

Wie man in Abb. 62 sehen kann, entspricht der Effekt einer Interpolation im Ortsraum, d.h. Details erscheinen schärfer, als es der bei der ursprünglichen Messung eingestellten Auflösung entspricht.

Die Fourier-Interpolation läßt natürlich sofort an die Half-Fourier-Technik (Kap. 6.4) denken. Doch bei der Half-Fourier-Technik kommt die höhere Auflösung nicht durch Interpolation zustande, sondern ist – durch explizite Mitnahme der hohen Frequenzen – real. Bei der Fourier-Interpolation liegt der Schwerpunkt dagegen auf der Messung des k -Raum-Zentrums, d.h. auf den Bildkontrasten.

Nach [16] ist die Fourier-Interpolation sinnvoll für Bilddetails, die kleiner sind als die ursprünglichen Voxel. Dies scheint sich besonders nutzen zu lassen z.B. zur Darstellung dünner Blutgefäße bei kontrastmittelgestützter Angiographie – einer zudem sehr timing-kritischen Anwendung. Mathematisch ausgedrückt entspricht diese Technik einer sog. *Nyquist-Shannon-Interpolation*.

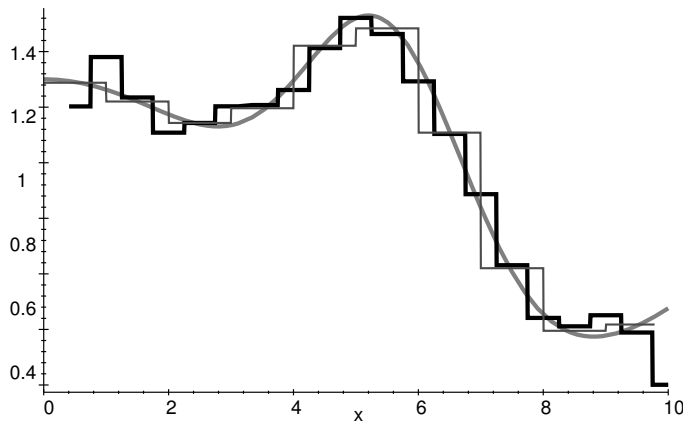


Abbildung 62: Vergleich: Ursprüngliche Funktion, grobe Digitalisierung, Ergebnis nach Faltung (dick, schwarz). Es zeigt sich ein Effekt wie bei einer Interpolation.

6.7 Apodization–Filter

Eine Apodization–Filterung bedeutet eine Multiplikation der k –Raum–Daten mit einer Glockenfunktion, z.B. einer Gaussglocke. Paßt diese Gaussglocke im Wesentlichen in den abgescannten k –Raum–Bereich (siehe Abb. 63), dann läßt sich die Wirkung beschreiben durch eine Faltung mit einer Gaussglocke im Bildraum (siehe Kap. A.6), anstelle der Faltung mit einer sinc–Funktion (siehe Kap. A.4). Es tritt also lediglich eine Glättung, aber keine Kantenoszillation auf. Allerdings geht diese Prozedur auf Kosten der Auflösung.

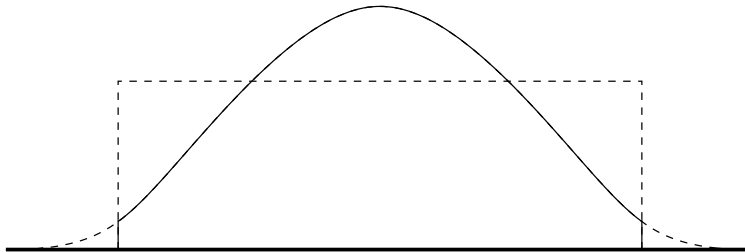


Abbildung 63: Bei Überlagerung mit einer geeigneten Glockenfunktion ist die Stufenfunktion nicht mehr relevant.

7 Sicherheitsaspekte

Dieses Kapitel beleuchtet die Sicherheitsaspekte, die sich bei der Untersuchung am Menschen ergeben. Es soll ganz deutlich darauf hingewiesen sein, daß zu dieser Thematik hier natürlich nur ein ganz allgemeiner Überblick gegeben werden kann. Im konkreten Einzelfall – für ein konkretes MR-Gerät – sind selbstverständlich die Geräteunterlagen des jeweiligen Herstellers maßgeblich und dafür auch heranzuziehen. Konkrete Richt-, bzw. Grenzwerte sind außerdem z.B. in [17] ausführlich beschrieben.

Die Kernspintomographie ist eine Untersuchungsmethode, die nach heutigem Wissensstand keinerlei gesundheitliche Belastung darstellt. Wegen der starken magnetischen und elektromagnetischen Felder, die dabei verwendet werden, besteht dennoch beträchtliche Unfallgefahr. Sorgfalt und Kenntnis der möglichen Gefahren und der notwendigen Maßnahmen im Notfall sind deshalb erforderlich.

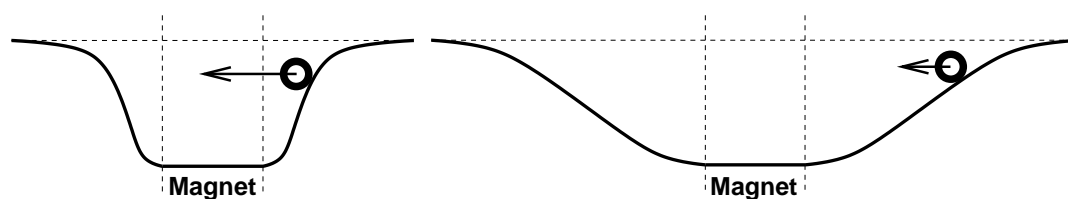
Die Wechselwirkung eines Kernspintomographen mit seiner Umwelt im Allgemeinen und dem zu untersuchenden Patienten im Besonderen setzt sich in erster Linie aus drei Komponenten zusammen, die alle einzeln mögliche Risiken bergen:

- ein starkes statisches Magnetfeld (permanent),
- ein starkes magnetisches Wechselfeld (bei Messung),
- eine intensive elektromagnetische Einstrahlung (bei Messung).

7.1 Risiken im statischen Magnetfeld



Bestimmte Metalle (Eisen, Nickel, Kobalt) und Legierungen werden durch Magnetfelder angezogen. Die Anziehungskraft wird dabei nicht von der Stärke des Magnetfeldes bestimmt, sondern von der Stärke der Magnetfeld*änderung* im Raum (der „Steilheit“ des Feldanstiegs). Ein anschauliches Modell hierfür ist das einer Senke, in die eine Masse rollt (Abb. 64).



(a) „Gute Abschirmung“: Kleines Streufeld, große Kraft. (b) „Schlechte Abschirmung“: Großes Streufeld, kleine Kraft.

Abbildung 64: Wirkung des Streufeldes im einfachen Modell einer Senke.

Betrachtet man den MR-Magneten vereinfacht als Dipol, dann nimmt mit zunehmendem Abstand die Feldstärke mit $1/r^3$ ab, siehe Kap. C.

Um das störende Feld außerhalb des Magneten (das sog. „Streufeld“) von möglichst kleiner Ausdehnung zu halten, besitzen moderne MR-Geräte eine sog. „aktive Abschirmung“; das sind zusätzliche Magnetspulen, die dieses Streufeld einigermaßen kompensieren. Deshalb ändert sich tatsächlich die Magnetfeldstärke näherungsweise mit $1/r^5$ oder gar stärker! Je effizienter die Abschirmung, desto größer ist also die Anziehungskraft des Magneten; gerade neuere Geräte verfügen über „gute Abschirmung“. „Gute Abschirmung“ hat deshalb nichts mit Sicherheit zu tun, sondern mit Platzbedarf des Magneten, was letzten Endes nur unter ökonomischen Gesichtspunkten günstig ist. Die Zug- und Drehkräfte von ferromagnetischen Gegenständen im Feld hängen außerdem von der Masse und der Form ab; in jedem Fall sind sie erheblich. Ferromagnetische Gegenstände können also in der Nähe des Magneten zum Geschoß werden und ernste Verletzungen verursachen. Dies gilt insbesondere, da sie sich weitgehend nach den Feldlinien orientieren; Scheren, Schraubenzieher, Haarklammern, etc. fliegen also nicht nur „irgendwie“ in den Magneten, sondern als Pfeile. Ferner werden feinmechanische Geräte (z.B. Analoguhren) möglicherweise beschädigt.

Erst recht gilt für ferromagnetische Implantate oder sonstige Metallteile, die möglicherweise im Körper sind: Die großen Kräfte, die darauf wirken, können zu u.U. tödlichen Verletzungen führen. Auch ist eine Beeinträchtigung elektromagnetisch empfindlicher Implantate zu befürchten.

Wichtig ist deshalb der Grundsatz: Personen, die irgendwelche ferromagnetischen Gegenstände (z.B. Operationsclipse, Metallsplitter, etc.) oder elektronische Implantate (z.B. Herzschrittmacher, Medikamenten-Dosierpumpen, etc.) tragen, dürfen niemals – auch nicht bei ausgeschaltetem Gerät – den Untersuchungsraum betreten! Die Gefahr besteht bereits bei Annäherung an den Magneten, nicht erst bei der Messung!

Außerdem werden magnetische Datenträger gelöscht (z.B. Disketten, Scheckkarten, Parkautomatenkarten, etc.). Bezüglich der Magnetfeldstärke sind also grundsätzlich Mindestabstände zu berücksichtigen.

Für die Empfindlichkeit verschiedener Geräte gegenüber Magnetfeldern gelten als Größenordnungen (z.B. nach [9]):

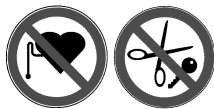
Magnetische Datenträger	3mT
SW-Monitore	1mT
Elektronische Implantate (Herzschrittmacher , Medikamentenpumpen, etc.)	0.5mT
Röntgengeräte	0.2mT

(Zum Vergleich: Die Feldstärke des Erdmagnetfeldes beträgt ca. 0.05mT.)

Daraus ergibt sich für den Magneten ein *Kontrollbereich*, der die 0.5mT Linie vollständig einschließt. Das entspricht typischerweise dem gesamten MR-Raum, der eben

dafür richtig dimensioniert sein muß; genau so definiert sich der oben erwähnte Platzbedarf. Die Größenordnungen betragen dafür (bei einem 1,5T-Gerät): 3m in xy-Richtung \times 5m in z-Richtung, gemessen von der Magnetfeldmitte. (Bei neueren Geräten sind diese Werte eher kleiner.) Die Form der Linien konstanter Feldstärke entspricht dabei in etwa der für einen Dipol, siehe Abb. 71.

7.2 Risiken im magnetischen Wechselfeld (Gradienten)



Für die MR-Messung wird das Magnetfeld zeitlich schnell verändert (Schaltung der Gradienten). Durch Induktion führt dies in *allen stromleitenden* Materialien – nicht nur in ferromagnetischen! – zu Wirbelströmen; dies folgt direkt aus der 2. Maxwell-Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}. \quad (132)$$

Da der menschliche Körper selbst in einem gewissen Maß leitfähig ist, können dadurch Nervenstimulationen ausgelöst werden. Dieser Effekt ist umso ausgeprägter, je schneller bzw. stärker die Gradienten sind, und je großflächiger die geschlossene Schleife ist, in der der Strom fließen kann. (Bei Geräten mit starken Gradienten wird mit einem speziellen System die Einhaltung von Grenzwerten bzgl. Nervenstimulation überwacht.) Konkret bedeutet das, daß bei der Lagerung von Patienten ein gegenseitiger Hautkontakt von Armen, Beinen und Körper möglichst vermieden werden sollte (siehe Abb. 65) – dies gilt vor allem bei der Verwendung von Sequenzen, die schnelle/starke Gradienten erfordern.

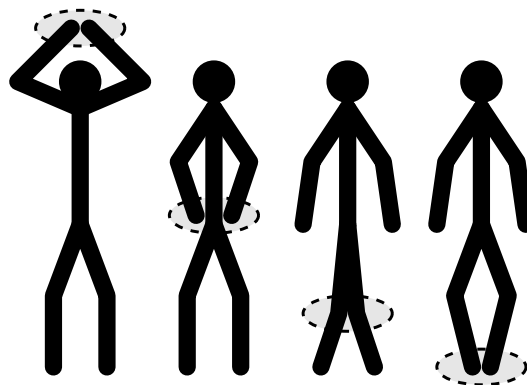


Abbildung 65: Beispiele für Kontaktstellen, die bei der Patientenlagerung vermieden werden sollten.

Speziell in guten Leitern können diese Ströme so stark sein, daß es zur Erhitzung des Materials kommt. Dies gilt nicht nur für alle Metalle, sondern z.B. auch für bestimmte Schminke, Lidschatten und Tätowierungen. Patienten mit nicht-ferromagnetischen Implantaten, etc., sollten darauf hingewiesen werden, sich bei Wärmeempfindungen frühzeitig bemerkbar zu machen. Erst recht gilt, daß elektromagnetisch empfindliche Implan-

te (also wieder: Herzschrittmacher, Medikamenten-Dosierpumpen, etc.) nicht mehr zuverlässig funktionieren.

7.3 Risiken im Hochfrequenzfeld



Das während der MR-Messung eingestrahlte elektromagnetisches Hochfrequenzfeld wird teilweise vom Körper des Patienten aufgenommen; dies führt zu einer Erwärmung. Für diese so zugeführte Energie gibt es strenge SAR-Richtwerte und -Grenzwerte (SAR: „spezifische Absorptionsrate“); das MR-Gerät kann diese nur einhalten, wenn es das Patientengewicht kennt, das deshalb bei der Patientenregistrierung (am Gerät) angegeben werden muß. Aus Sicherheitsgründen orientieren sich die SAR-Richtwerte an Patienten mit eingeschränktem Thermoregulationsvermögen (Kranke, Kleinkinder) und liegen in der Größenordnung von 1W/kg. Dies entspricht in etwa dem Grundumsatz beim Menschen. Die Erwärmung kann also durchaus spürbar sein.

Das HF-Feld kann ebenfalls stromleitende Materialien erhitzen. Generell sollte vermieden werden, daß Spulenzuleitungen den Körper des Patienten berühren, da dies zu Verbrennungen führen kann.

Außerhalb des Untersuchungsraums gibt es (bei geschlossener Tür) keine HF-Belastung, da diese Räume dafür eine Abschirmung besitzen müssen (vor allem auch gegen HF-Störungen von Außen!).

7.4 Sonstige Gefährdungen

7.4.1 Schallemission

Das Schalten der Gradienten während der Messung erzeugt pulsartig mechanische Kräfte im Gerät und führt so zu Vibrationen und damit zu den bekannten Klopfgeräuschen, die sehr laut sein können. Im Grunde ist das der gleiche Effekt wie bei einem Lautsprecher. Zur sicheren Vermeidung von Gehörschäden ist der Patient deshalb mit einem Gehörschutz auszustatten.

7.4.2 Laservisier



MR-Geräte mit Laservisier enthalten Laser der Klasse 2. Es soll deshalb vermieden werden direkt in den Strahl zu blicken. Besondere Vorsicht ist bei Patienten mit fehlendem natürlichen Lidreflex geboten (Abdeckung der Augen, Schutzbrille).

7.4.3 Helium



Mittel- und Hochfeld-MR-Geräte (0.5 Tesla und mehr) besitzen typischerweise supraleitende Magnete. Als Kühlmittel dafür dient flüssiges Helium, mit den bekannten Eigenschaften: Es ist

- ungiftig,
- geruchlos,
- nicht brennbar,
- aber so kalt (flüssig: $\leq -269^{\circ}\text{C} \equiv 4\text{K}$), daß bei Austritt Luft verflüssigt wird und es bei Berührung zu Kaltverbrennungen kommt.

In einem solchen Gerät befinden sich bis zu 2000 Liter flüssiges Helium, wodurch es z.B. auch unter die Druckbehälterverordnung fällt.

Unfälle bzw. „unerwünschte Ereignisse“ mit flüssigem Helium sind nicht sehr wahrscheinlich; am ehesten ist dies vorstellbar bei technischen Eingriffen am Magneten oder beim Nachfüllen von Helium; währenddessen ist der Normalbetrieb aber ohnehin nicht zugelassen.

In diesem Zusammenhang gibt es als singuläres Ereignis hauptsächlich den sog. *Quench*: Darunter versteht man allgemein den Zusammenbruch des supraleitenden Zustandes der Magnetspule und deren Übergang in den normaleitenden Zustand. Die komplette im Magnetfeld gespeicherte Energie wird dabei freigesetzt und führt zum fast schlagartigen Verdampfen des gesamten Heliums. Für diesen Fall sind spezielle Leitungen vorgesehen, die das große Volumen von Heliumgas ins Freie abführen. Ein Heliumunfall träte dann bei Versagen dieser Leitungen ein:

- Durch starke Expansion des verdunstenden Heliums kann die Atemluft verdrängt werden; ein Liter flüssiges Helium nimmt als Gas 0.75m^3 Volumen ein. Es besteht Erstickungsgefahr! MR-Räume müssen deshalb belüftet sein.
- Obwohl Helium selbst nicht brennbar ist, besteht durch freigewordenes flüssiges Helium immer Brandgefahr, wenn dadurch Stickstoff aus der Luft auskondensiert und sich so Sauerstoff anreichert. Rauchen und offenes Feuer sind deshalb im MR-Raum verboten.

Für den Fall eines notfallmäßigen Abschaltens des Magnetfeldes (z.B. bei Brand im Untersuchungsraum) muß der Quench auch absichtlich ausgelöst werden können (mittels eines speziellen Notschalters). Dafür steht eine eigene Stromversorgung zur Verfügung, mit der die Supraleitung durch Heizen zum Erliegen gebracht werden kann. Nach Auslösen des Quench vergehen allerdings noch Minuten, bis das Magnetfeld hinreichend abgebaut ist.

A Minimaldarstellung mathematischer Werkzeuge

Für eine gewisse Abgeschlossenheit des Themas müssen die grundlegenden mathematischen Werkzeuge zumindest erwähnt sein. Ansonsten sollte man den mathematischen Anspruch dieses Kapitels – zumal von einem Physiker geschrieben – nicht allzu hoch hängen. Untypisch und bemerkenswert ist jedenfalls, daß man hier mit relativ wenig Mathematik relativ weit kommt, und oft ermöglichen es die in diesem Kapitel zusammengefassten Konzepte Ergebnisse quasi ohne Rechnung zu erhalten.

A.1 Nochmals: Die Fourier–Transformation

Hier soll nun eine leicht veränderte Definition der Fourier–Transformation wie in Gl. (93) angegeben werden; dort traten immer die Vorfaktoren $1/\sqrt{2\pi}$ auf. Diese Vorfaktoren können aber auch gänzlich einer der Transformationsrichtungen als $1/(2\pi)$ zugeschlagen werden. (In jedem Fall muß immer die Rücktransformierte der transformierten Funktion wieder die ursprüngliche Funktion ergeben.) Zusätzlich wird eine Variablentransformation von der Winkelgeschwindigkeit ω nach einer Frequenz ν vorgenommen:

$$\omega = 2\pi\nu \quad \Longrightarrow \quad d\omega = 2\pi d\nu, \quad (133)$$

also:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t} dt; \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)e^{+i2\pi\nu t} 2\pi d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (134)$$

die Vorfaktoren sind also durch diese Variablentransformation verschwunden.

Zur Vereinfachung der Formulierung soll hier die Kurzschreibweise (vgl. [9])

$$f(t) \circ\!\!\!\bullet F(\nu); \quad (135)$$

verwendet werden.

Für die räumliche Transformation gilt dann mit

$$\kappa := \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\kappa \quad (136)$$

die völlig analoge Formulierung, ebenfalls ohne Vorfaktoren:

$$F(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\kappa x} dx; \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa)e^{+i2\pi\kappa x} d\kappa. \quad (137)$$

Die Variable κ hat die Bedeutung der Zahl der Wellenlängen pro Längeneinheit, in vollständiger Analogie zur Frequenz ν , die die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit angibt. Auch hierfür soll die Kurzschreibweise $f(x) \circ\!\!\!\bullet F(\kappa)$ gebraucht werden.

Natürlich ist es nicht sonderlich elegant, mit zwei verschiedenen Versionen der Fourier–Transformation zu arbeiten. Dies läßt sich jedoch hier kaum vermeiden, da die Formulierung in der Form von Gln. (91)(92)(93) die geläufigere ist; außerdem sollte – wenn

es schon um eine Transformation in einen k -Raum geht – der Vektor \vec{k} auch explizit genannt werden. Andererseits ist mit obiger Definition, die ohne Vorfaktoren auskommt, der Faltungssatz, etc. (siehe unten) eleganter zu formulieren. Außerdem rechnet man mit Frequenzen, statt mit Winkelgeschwindigkeiten. In jedem Fall sind die Unterschiede beider Formulierungen rein formaler Natur; eventuelle konstante Vorfaktoren spielen für das Verständnis keine große Rolle.

Es ist nicht gesichert, daß die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(x)$ überhaupt existiert, wenn nicht die folgenden Bedingungen gelten (siehe z.B. [18]):

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$; (Integrierbarkeit über beliebige Gebiete)
- in einem endlichen Intervall besitzt $f(x)$ nur endlich viele Unstetigkeiten und Extrema;
- $f(x)$ besitzt keine unendlichen Unstetigkeiten.

Eine Funktion, die diese Bedingungen nicht erfüllt, kann dennoch eine Fourier-Transformierte besitzen, wenn sie hervorgeht aus dem Limes einer Folge von Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen; dies trifft z.B. für die Deltafunktion (siehe unten) zu.

Wie durch direktes Nachrechnen leicht zu zeigen ist, gelten für die Fourier-Transformation die folgenden Rechenregeln (mit $f_n \circ \bullet F_n$ und $a > 0$):

$$\text{Linearität: } f_1(t) + f_2(t) \quad \circ \bullet \quad F_1(\nu) + F_2(\nu); \quad (138)$$

$$\text{Verschiebungssatz: } f(t - t_0) \quad \circ \bullet \quad F(\nu)e^{-i2\pi\nu t_0}; \quad (139)$$

$$F(\nu - \nu_0) \quad \bullet \circ \quad f(t)e^{+i2\pi\nu_0 t}; \quad (140)$$

$$\text{Ähnlichkeitssatz: } f(at) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{a}F\left(\frac{\nu}{a}\right); \quad (141)$$

$$F(a\nu) \quad \bullet \circ \quad \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right); \quad (142)$$

$$\text{Ableitung: } f^{(n)}(t) \quad \circ \bullet \quad F(\nu)(+2\pi i\nu)^n \quad (143)$$

$$F^{(n)}(\nu) \quad \bullet \circ \quad f(t)(-2\pi i t)^n. \quad (144)$$

Wichtige Zusatzinformationen lassen sich aus der Betrachtung von Symmetrien ableiten (z.B. [19]):

$$f(t) \quad \text{reell, dann} \quad F(-\nu) = F^*(\nu); \quad (145)$$

$$f(t) \quad \text{imaginär, dann} \quad F(-\nu) = -F^*(\nu); \quad (146)$$

$$f(t) \quad \text{gerade, dann} \quad F(\nu) \text{ gerade}; \quad (147)$$

$$f(t) \quad \text{ungerade, dann} \quad F(\nu) \text{ ungerade}; \quad (148)$$

Diese Relationen können auch kombiniert werden, z.B. gilt:

$$\begin{aligned} f(t) \text{ reell und gerade} &\implies \\ &F(-\nu) = F^*(\nu) \quad \text{und} \quad F(-\nu) = F(\nu) \\ &\implies F(\nu) \text{ reell und gerade.} \end{aligned}$$

Die Relation (145) war bereits die Begründung für die Half-Fourier-Technik (Kap. 6.4).

Jede beliebige reelle Funktion $f(t)$ läßt sich schreiben als Summe einer geraden $g(t)$ und einer ungeraden Funktion $u(t)$:

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(t) + f(-t))}_{g(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(t) - f(-t))}_{u(t)}; \quad (149)$$

die Fourier-Transformation einer beliebigen reellen Funktion wird damit zu

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) + u(t)) (\cos(2\pi\nu t) - i \sin(2\pi\nu t)) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) \cos(2\pi\nu t) - i u(t) \sin(2\pi\nu t)) dt; \end{aligned} \quad (150)$$

alle weiteren Terme verschwinden, da es sich dabei um die Integration (mit symmetrischen Grenzen) von ungeraden Funktionen handelt.

Der essentielle Unterschied zwischen einer Hin- und einer Rücktransformation liegt in der Verknüpfung der beiden verbliebenen Terme in Gl. (150) („-“ für „hin“, „+“ für „rück“). Insbesondere ergibt sich dann für reelle, gerade Funktionen, daß die Richtung der Transformation nicht relevant ist; es gilt dann also

$$f(t) \circ\text{---}\bullet F(\nu) \iff F(t) \circ\text{---}\bullet f(\nu). \quad (151)$$

Die Fourier-Transformation einer (L -periodischen) Funktion liefert ein diskretes Spektrum von Werten (sog. Fourier-Zerlegung):

$$f_L(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{+2\pi i \kappa_k x} \circ\text{---}\bullet F_k = \frac{1}{L} \int_L f_L(x) e^{-2\pi i \kappa_k x} dx, \quad \text{wobei } \kappa_k := \frac{k}{L}; \quad (152)$$

der Abstand $\Delta\kappa$ dieser diskreten Werte ergibt sich aus:

$$\Delta\kappa = \kappa_{k+1} - \kappa_k = \frac{1}{L}. \quad (153)$$

Die – bisher vorgestellte – *kontinuierliche* Fourier-Transformation ist sinnvoll und angenehm für analytische Überlegungen; was aber in der Realität – numerisch in einem Computer – stattfindet, ist immer die *diskrete endliche* Fourier-Transformation:

$$f_n = \sum_k^N F_k e^{+2\pi i \frac{nk}{N}} \circ\text{---}\bullet F_k = \frac{1}{N} \sum_n^N f_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} \quad (154)$$

Orts- und k -Raum sind hier also in N Punkten diskretisiert, und für die Ortsauflösung Δx gilt dann:

$$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta k} = \frac{1}{\mathcal{K}}. \quad (155)$$

(Mit \mathcal{K} ist die Größe des erfassten k -Raums gemeint, analog zur Größe L des erfassten Ortsraums.) Für die diskrete Fourier-Transformation gelten analog die meisten der oben genannten Zusammenhänge.

A.2 Diracsche Deltafunktion

Mathematisch zählt die Diracsche Deltafunktion $\delta(x)$ zur Kategorie „uneigentlicher Objekte“; genaugenommen lautet die korrekte Bezeichnung *Delta-Distribution*, dennoch wird sie häufig in der physikalischen Literatur als „Funktion“ bezeichnet. Üblicherweise wird die δ -Funktion definiert (z.B. [20]) als:

$$\delta(x) := \begin{cases} \infty; & x = 0; \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{wobei} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (156)$$

Bei der Deltafunktion handelt es sich also um eine unendlich schmale, unbeschränkte Verteilungsfunktion, deren Integral gleich 1 ist.

Praktischerweise kann die Deltafunktion aufgefasst werden als Grenzfall von „gutar-tigen“ Funktionen, die die Bedingungen für die Existenz ihrer Fourier-Transformierten erfüllen; diese Funktionen sind auf 1 normiert und werden – um zu einer Deltafunktion zu gelangen – auf eine verschwindende Breite zusammengeschoben. Dies ist beispielsweise mit folgenden Funktionen möglich:

$$\delta(x) = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2} & \text{(Gausskurve)} \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a \sin(ax)}{\pi ax} & \text{(sinc-Funktion)} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} & \text{(Lorentzkurve)} \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \begin{array}{c} \text{Rechteckfunktionsdiagramm} \\ \text{mit Höhe } a \text{ und Breite } \frac{1}{a} \end{array} & \text{(Rechtecksfunktion)} \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \begin{array}{c} \text{Dreiecksfunktionsdiagramm} \\ \text{mit Höhe } a \text{ und Basis } \frac{1}{a} \end{array} & \text{(Dreiecksfunktion)} \end{cases} \quad (157)$$

Die Deltafunktion besitzt die folgende wichtige Eigenschaft:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad \text{mit } x_0 \in [a, b], \quad (158)$$

was auch als *Abtasteigenschaft der Deltafunktion* bezeichnet wird. (Genaugenommen handelt es sich bei Gl. (158) um die grundlegende *Definition* der Deltafunktion.) Die Deltafunktion ist wichtig und nützlich, da sie oft – in eben besagter Weise – als Grenzfall auftritt, und dann Rechnungen erheblich vereinfacht. Sie ist z.B. die Fourier-Transformierte (und also das Frequenzspektrum) einer „monochromatischen“ Schwingung $e^{i2\pi\nu_0 t}$:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu_0 t} e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\nu - \nu_0)t} dt = \delta(\nu - \nu_0), \quad (159)$$

was durchaus anschaulich ist (einzelner Peak bei ν_0 im Spektrum), und tatsächlich auch wieder eine Deltafunktion ergibt; mit $\tau := 2\pi t$ gilt nämlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-\nu\tau}}{-\nu} \right]_{-T}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\nu T)}{\nu} = \delta(\nu). \quad (160)$$

In analoger Weise gilt, daß die Deltafunktion gebildet wird aus der (gleich gewichteten) Summe *aller* Frequenzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\nu(t-t_0)} d\nu = \delta(t - t_0); \quad (161)$$

sie beschreibt also den Grenzfall der Fourier-Transformierten einer konstanten Funktion.

Abschließend noch einige wichtige Rechenregeln:

$$x\delta(x) = 0; \quad (162)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}; \quad (x_k : \text{einfache Nullstellen von } f(x);) \quad (163)$$

insbesondere gilt damit:

$$\delta(x) = \delta(-x); \quad (164)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (165)$$

A.3 Faltung und Faltungssatz

Unter Faltung versteht man mathematisch die Verknüpfung zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in der folgenden Weise:

$$(f_1 * f_2)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi. \quad (166)$$

Die Operation der Faltung besitzt die angenehmen Eigenschaften (z.B. [9]): Sie ist

kommutativ: $f_1 * f_2 = f_2 * f_1;$

assoziativ: $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3); \quad (167)$

distributiv, linear: $f_3 * (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 f_3 * f_1 + c_2 f_3 * f_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$

Ableitung: $(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2 = f_1 * f_2'.$

Die besondere Bedeutung der Faltung besteht in ihrem Bezug zur Fourier-Transformation: Sei $g \circ \bullet G$ und $h \circ \bullet H$ (siehe Gl. (135)), dann gilt:

$$g \cdot h \circ \bullet G * H, \quad \text{und umgekehrt: } G \cdot H \bullet \circ g * h. \quad (168)$$

Dies ist der *Faltungssatz*. Die Fouriertransformierte eines Produkts ist also die Faltung der Einzel-Fouriertransformierten, und die Fouriertransformierte einer Faltung ist das Produkt der Einzel-Fouriertransformierten. Bewiesen werden kann das einfach durch direktes Nachrechnen unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Deltafunktion.

Wie leicht einzusehen ist, führt eine Faltung mit der δ -Funktion zu keiner Veränderung (vgl. Gl.(158)):

$$(\delta * f)(x) = f(x); \tag{169}$$

bemerkenswert ist ferner die Faltung mit einer harmonischen Oszillation $e^{2\pi\nu t}$, die zu einer Fourier-Transformation führt (mit $f \circ \bullet \rightarrow F$):

$$e^{2\pi\nu t} * f(t) = \int f(\tau)e^{2\pi\nu(t-\tau)}d\tau = e^{2\pi\nu t}F(\nu). \tag{170}$$

A.4 Rechtecksfunktion: Fouriertransformierte und Bandbreite

Sei eine Rechtecksfunktion der Breite T definiert als:

$$r_T(t) := \begin{cases} 1 & : -\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2}, \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases} \tag{171}$$

dann läßt sich die Fourier-Transformierte direkt berechnen:

$$r_T(t) \circ \bullet \rightarrow R_T(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} r_T(t)e^{-i2\pi\nu t}dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi\nu t}dt = \frac{1}{\pi\nu} \sin(\pi\nu T). \tag{172}$$

Diese Funktion tritt in diesem Kontext so häufig auf, daß dafür eine eigene Bezeichnung gebräuchlich ist:

$$\text{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & : x \neq 0, \\ 1 & : x = 0. \end{cases} \tag{173}$$

Damit läßt sich also schreiben:

$$r_T \circ \bullet \rightarrow R_T(\nu) = T \cdot \text{sinc}(\nu T); \tag{174}$$

die Fourier-Transformation der Rechtecksfunktion ist also die sinc-Funktion (Abb. 66).

Da die Rechtecks-, bzw. die sinc-Funktion reell und gerade ist, läßt sich die Relation (151) bezüglich der Umkehrung der Transformationsrichtung darauf anwenden, und so folgt für eine Rechtecksfunktion im Frequenzraum

$$r_{\mathcal{N}}(\nu) \bullet \rightarrow \circ \frac{1}{\pi t} \sin(\pi t \mathcal{N}); \quad (\mathcal{N} : \text{Frequenz-Breite der Rechtecksfunktion}). \tag{175}$$

Natürlich gilt völlig analog für eine räumliche Transformation:

$$r_L(x) \circ \bullet \rightarrow \frac{1}{\pi \kappa} \sin(\pi \kappa L) \quad \text{und} \tag{176}$$

$$r_{\mathcal{K}}(\kappa) \bullet \rightarrow \circ \frac{1}{\pi x} \sin(\pi x \mathcal{K}). \tag{177}$$

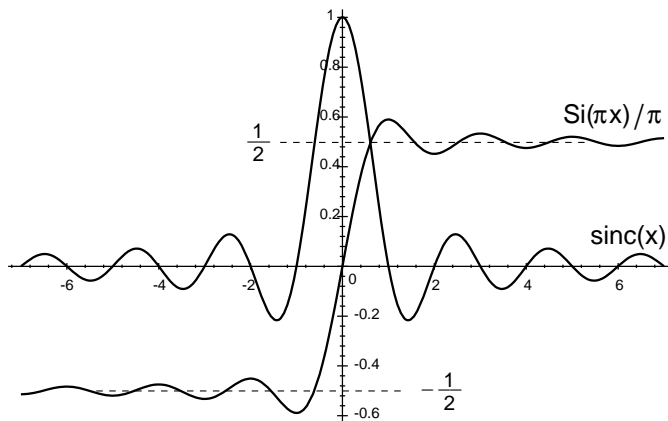


Abbildung 66: Die sinc-Funktion und dessen Stammfunktion, ausgedrückt mit dem Integralsinus $\text{Si}(\pi x)/\pi$.

Das Betragsquadrat der Fouriertransformierten bildet die frequenzabhängige Intensitätsverteilung (z.B. [21]); die Bandbreite $\Delta\nu$ bestimmt sich durch den gegenseitigen Abstand der Punkte in der Verteilung, an denen die Intensität auf die Hälfte des Maximums abgefallen ist. Wie allgemein bekannt besitzt die sinc-Funktion ihr Maximum bei $(0,1)$; das Intensitätsmaximum beträgt also $|R_T(0)|^2 = T^2$. Es wäre also – mit Blick auf Gl. (172) – die transzendente Gleichung

$$|R_T(\nu)|^2 = \left(\frac{1}{\pi\nu}\right)^2 \sin^2(\pi\nu T) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad (178)$$

zu lösen. Man kann sich näherungsweise damit behelfen zu berechnen, wo die Einhüllende (d.h. die Amplitude des $\sin^2(\cdot)$) auf die Hälfte abgefallen ist, also:

$$T^2 \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi^2(\Delta\nu/2)^2} \implies \Delta\nu = \frac{1}{T} \frac{\sqrt{8}}{\pi} \approx 0.9 \cdot \frac{1}{T}. \quad (179)$$

(Die Näherung kann gemacht werden, da die Bandbreitenbestimmung ohnehin nur eine Abschätzung darstellt.) *Die Frequenzbandbreite ist also in etwa der Kehrwert der Breite der Rechtecksfunktion.*

A.4.1 Faltung mit sinc-Funktion

In Kap. 5.1.3 und bei der Darstellung des Gibbs-Artefakts in Kap. 5.2.2 wurde gesagt, daß es wegen des Fehlens der hohen Ortsfrequenzen zu Kantenoszillationen kommt, da diese außerhalb des erfassten Bereiches liegen. Zu dieser Erscheinung erhält man nun einen besseren Zugang: Der gescannte endliche Bereich des k -Raums muß aufgefasst werden als Produkt des unendlichen k -Raums mit einer Rechtecksfunktion, die alles bis auf den erfassten Bereich quasi „herausstanzt“. Deshalb erweist sich das erzeugte Bild als Faltung des „perfekten“ Bildes mit der der Auflösung entsprechenden sinc-Funktion: Bei einer Auflösung Δx des zu erzeugenden Bildes beträgt die Breite der Rechtecksfunktion im k -Raum $1/\Delta x$ (analog zu Gl. (100), bzw. (155)), d.h. diese sinc-Funktion lautet:

$$R_{1/\Delta x} = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{\pi x}{\Delta x}\right) = \frac{1}{\Delta x} \text{sinc}\left(\frac{x}{\Delta x}\right). \quad (180)$$

Die Kantenoszillationen, die sich für eine Stufenfunktion $h(x)$ mit

$$h(x) := \begin{cases} 1 & : x \leq 0, \\ 0 & : x > 0, \end{cases} \quad (181)$$

ergeben, lassen sich so leicht analytisch angeben, indem man die Faltung ausführt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{\Delta x}\right) h(x - \xi) d\xi &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{\Delta x}\right) d\xi = \\ &= \int_{\frac{x}{\Delta x}}^{\infty} \operatorname{sinc}(y) dy = \underbrace{\int_0^{\infty} \operatorname{sinc}(y) dy}_{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{x}{\Delta x}} \operatorname{sinc}(y) dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}\left(\frac{\pi x}{\Delta x}\right). \end{aligned} \quad (182)$$

Diese Funktion ist in Abb. 67 abgebildet; sie hat genau die Gestalt von Abb. 37(a), was mit Blick auf Abb. 66 auch nicht sehr überrascht.

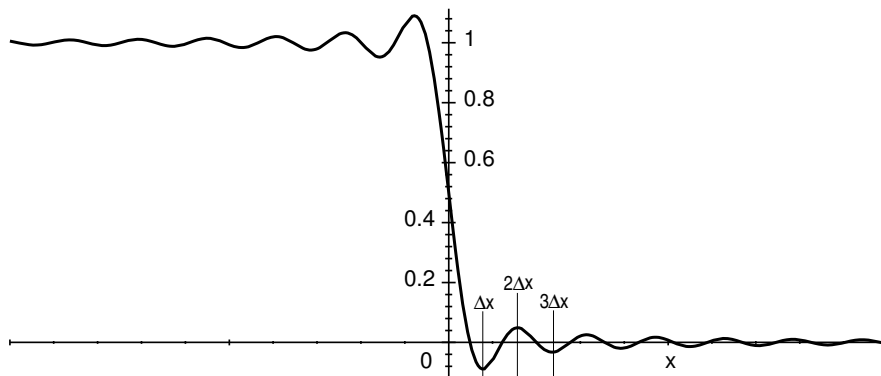


Abbildung 67: Das Ergebnis der Faltung einer Stufenfunktion mit einer sinc-Funktion: Der Effekt von Kantenoszillationen.

A.5 Bandbreite einer harmonischen Oszillation endlicher Dauer

Beschränkt man eine „monochromatische“ Schwingung $e^{i2\pi\nu_0 t}$ auf eine endliche Zeitdauer T , dann verbreitert sich deren Frequenzspektrum. Dies kann nun leicht berechnet werden: Die zeitliche Beschränkung bedeutet eine Multiplikation der (unendlich langen) Welle mit einer zeitlichen Rechtecksfunktion (nach Gl. (171)); gesucht ist also die Fouriertransformierte dieses Produkts, was sich aber sofort aus dem Faltungssatz ergibt, da die Einzel-Transformierten bekannt sind (unter Berücksichtigung von Gl. (169)):

$$e^{i2\pi\nu_0 t} \cdot r_T(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \delta(\nu - \nu_0) * R_T(\nu) = R_T(\nu - \nu_0), \quad (183)$$

d.h. das Ergebnis ist analog wie unter Gl. (172), lediglich um ν_0 verschoben; insbesondere ergibt sich die gleiche Bandbreite. (Das Ergebnis von Gl. (183) hätte sich auch direkt durch Anwenden des Verschiebungssatzes (Gl. (139)) erhalten lassen.)

A.6 Gaußkurve und dessen Fouriertransformierte

Wie aus [22] bekannt, lautet die auf 1 normierte Gaußkurve:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (184)$$

Dabei bezeichnet σ_x die Standardabweichung der Funktion, wenn man sie als Verteilung auffasst; dies ist natürlich auch ein Maß für deren Breite.

Die Fouriertransformierte der Gaußkurve läßt sich leicht berechnen:

$$F(\kappa) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp(-i2\pi\kappa x) dx \quad (185)$$

$$= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \cos(2\pi\kappa x) dx = e^{-2\pi^2\sigma_x^2\kappa^2}. \quad (186)$$

Der Integralausdruck in Gl. (186) ist in den Standard-Formelsammlungen (z.B. [11]) angegeben. Die Fouriertransformierte einer Gaußkurve ist also wieder eine Gaußkurve mit der Standardabweichung

$$\sigma_\kappa = \frac{1}{2\pi\sigma_x};$$

Die Breiten dieser Gaußkurven sind also zueinander umgekehrt proportional. Beide Kurven sind „formgleich“, wenn $\sigma_x \equiv \sigma_\kappa = 1/\sqrt{2\pi}$; dann gilt

$$e^{-\pi x^2} \circ \bullet e^{-\pi \kappa^2}. \quad (187)$$

Diese Kurven sind außerdem normiert.

A.6.1 Faltung mit Gaußkurve

Die Wirkung der Faltung mit einer Gaußkurve läßt sich wieder am Beispiel einer Stufenfunktion nach Art von Gleichung (181) demonstrieren, indem auch hier die Faltungsprozedur leicht explizit ausgeführt werden kann:

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2} h(x-\xi) d\xi = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-a^2\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-a^2\xi^2} d\xi \quad (188)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ax} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf}(ax)). \quad (189)$$

Diese Funktion ist in Abb. 68 dargestellt; wie man sieht, erfolgt eine Abrundung, bzw. Glättung von scharfen Übergängen. Dabei bezeichnet $\operatorname{erf}(x)$ das Integral über die Gaußkurve, das sog. Gaussche Fehlerintegral.

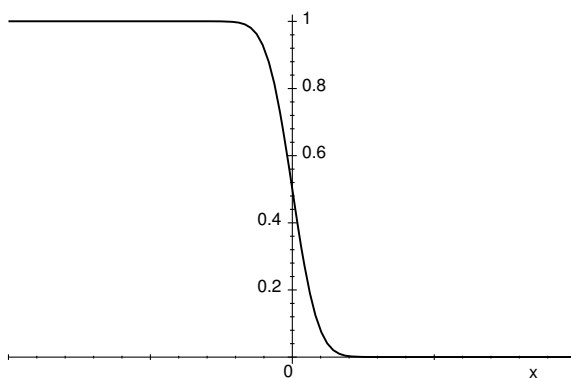


Abbildung 68: Ergebnis der Faltung einer Stufenfunktion mit einer Gausskurve: Effekt einer Glättung.

A.7 Gedämpfte Schwingung: Fouriertransformierte und Bandbreite

Die Signalzerfall nach einer Kernspinanregung (FID: „free induction decay“) kann als gedämpfte Schwingung

$$f_{\nu_0}(t) = \begin{cases} 0; & t < 0; \\ e^{-t/T} e^{i2\pi\nu_0 t}; & t \geq 0; \end{cases} \quad (190)$$

aufgefaßt werden.

Die Fouriertransformierte davon läßt sich direkt berechnen:

$$F_{\nu_0}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\nu_0}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1/T + i2\pi(\nu - \nu_0))t} dt = \frac{1/T - i2\pi(\nu - \nu_0)}{(1/T)^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}. \quad (191)$$

Man findet also für $F_{\nu_0}(\nu) = r(\nu) e^{i\phi(\nu)}$ als Betrag r und als Phase ϕ :

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}}, \quad \phi = \arctan(2\pi T(\nu - \nu_0)); \quad (\Re F_{\nu_0} > 0). \quad (192)$$

Zur Berechnung der Bandbreite benötigt man die Intensitätsverteilung

$$r^2(\nu) = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2} \quad (\text{„Lorentz-Verteilung“}). \quad (193)$$

Deren Maximum liegt bei (ν_0, T^2) ; als Halbwertsbreite ergibt sich somit $\Delta\nu = 1/(\pi T)$.

Wie in Gln. (157) gezeigt, läßt sich eine Lorentz-Verteilung in der normierten „Reinform“ auch als Approximation der Deltafunktion verwenden:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (194)$$

A.8 Heaviside-Funktion, Kausalitätsprinzip

Die Heaviside-Stufenfunktion $\theta(t)$ ist definiert als

$$\theta(t) := \begin{cases} 0; & t < 0; \\ 1; & t > 0. \end{cases} \quad (195)$$

Es besteht ein enger Zusammenhang dieser Funktion mit der δ -Funktion (z.B. [20]):

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x). \quad (196)$$

Da die Stufenfunktion kein endliches Integral besitzt, läßt sich deren Fourier-Transformierte nicht so einfach berechnen. Als Näherung für $\theta(t)$ kann man aber verwenden:

$$\theta(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 0; & t < 0; \\ e^{-t/T}; & t > 0; \end{cases} \quad (197)$$

dies ist aber nichts anderes als eine gedämpfte Schwingung nach Gl. (190) mit $\nu_0 = 0$. Die Fourier-Transformierte hiervon ergibt sich deshalb – mit Blick auf Gl. (194) – direkt aus Gl. (191):

$$\begin{aligned} \theta(t) \circ \bullet \Theta(\nu) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1/T}{(1/T)^2 + (2\pi\nu)^2} - \imath \frac{2\pi\nu}{(1/T)^2 + (2\pi\nu)^2} \right) \\ &= \pi\delta(2\pi\nu) - \frac{\imath}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\nu}{\epsilon^2 + \nu^2}. \end{aligned} \quad (198)$$

Für sich genommen ist die Heaviside-Funktion zugegebenermaßen nicht sehr interessant; Gl. (198) ist auch eher als Zwischenergebnis für das nun Folgende zu sehen: Die Stufenfunktion ist nämlich geeignet zur Beschreibung eines „Einschaltens“ (zum Zeitpunkt $t = 0$) einer Funktion $f(t)$; solche Funktionen müssen sich dann schreiben lassen als

$$f(t) \stackrel{!}{=} f(t)\theta(t). \quad (199)$$

Dann gilt für die Fouriertransformierte:

$$f(t) \circ \bullet F(\nu) \stackrel{!}{=} F(\nu) * \Theta(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu')\Theta(\nu - \nu')d\nu'; \quad (200)$$

aus Gl. (198) folgt damit:

$$F(\nu) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu')\delta(2\pi(\nu - \nu'))d\nu' - \imath \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu') \frac{\nu - \nu'}{\epsilon^2 + (\nu - \nu')^2} d\nu'. \quad (201)$$

Der Integrand des Imaginärteils verhält sich für kleine ϵ wie $F(\nu')/(\nu - \nu')$; damit es bei $\nu = \nu'$ nicht zur Divergenz kommt, kann man bei der Integration dort eine beliebig kleine Lücke lassen, also (mit Gl. (165)):

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \pi \frac{1}{2\pi} F(\nu) - \frac{\imath}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-\infty}^{\nu-\epsilon} \frac{F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu' + \int_{\nu+\epsilon}^{\infty} \frac{F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu' \right\} \\ &= \frac{1}{2} F(\nu) - \frac{\imath}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'. \end{aligned} \quad (202)$$

Der Ausdruck $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \{\dots\}$ ist in dieser Form gerade die Definition des Cauchy-Prinzipalwertes \mathcal{P} .

Insgesamt ergibt sich so:

$$F(\nu) = -\frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu', \quad (203)$$

woraus sofort zu sehen ist, daß Real- und Imaginärteil voneinander abhängen:

$$\Re F(\nu) = +\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'; \quad (204)$$

$$\Im F(\nu) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'; \quad (205)$$

Dies entspricht den *Kramers-Kronig-Relationen* (z.B. [4]).

Als markantes Ergebnis läßt sich also festhalten: Wenn Funktionen irgendwann (räumlich oder zeitlich) „eingeschaltet“ werden, dann bedeutet das für deren Fourier-Transformierte, daß deren Real- und Imaginärteil auseinander hervorgehen. Der explizit zeitabhängige Vorgang eines Einschaltens stellt das Grundprinzip eines Kausalzusammenhangs zwischen Ursache und Wirkung dar. In der Literatur (z.B. [10]) wird der beschriebene Sachverhalt deshalb sogar als *mathematische Formulierung des Kausalitätsprinzips* bezeichnet.

B Der steady-state-Zustand der Magnetisierung

Hier soll nun die steady-state-Formel für die Magnetisierung bei Gradientenecho-Sequenz (vereinfacht) hergeleitet werden:

In Kap. 2.2 wurde gezeigt, daß nur die z-Komponente der Spins zur Anregung relevant ist, da sie *nach* dem Flip ein Maß für das Dipolmoment des „sendenden“ Spins ist. Deshalb ist der Ausgangspunkt für die folgende Rechnung die Relaxation der z-Komponenten der Magnetisierung; angefangen mit einer Anregung (Flip um den Winkel α) relaxiert diese Komponente exponentiell (mit der Zeitkonstanten $T1$) gegen den Wert M_0 zurück (maximale Relaxation in Feldrichtung):

$$M(t) = M_0(1 - e^{-\frac{t}{T1}\zeta}). \quad (206)$$

Dies folgt direkt aus der Lösung der Relaxations-Gleichung (16). ζ ist lediglich ein Parameter zur Anpassung der Funktion, und dessen Wert läßt sich aus der Anfangsbedingung ermitteln:

$$M(t=0) = M \cos \alpha \stackrel{!}{=} M_0(1 - \zeta); \quad (207)$$

der Zeitpunkt $t = 0$ ist hier als unmittelbar dem α -Puls folgend zu verstehen, deshalb ergibt sich wegen der Verkippung um den Winkel α der Term $\cos \alpha$. Für ζ findet man so:

$$\zeta = 1 - \frac{M}{M_0} \cos \alpha. \quad (208)$$

Der Wert der z-Komponente, angefangen von einem Wert M , wird also nach einem Zyklus aus Anregung (Flip um α) und Wartezeit TR zu:

$$M \longrightarrow M_0 \left(1 - \left(1 - \frac{M}{M_0} \cos \alpha \right) e^{-\frac{TR}{T1}} \right). \quad (209)$$

Damit kann nun die z-Komponente der Magnetisierung, die sich im Grenzfall häufiger Wiederholungen einstellt, berechnet werden. Die Grenzwerte solcher iterierter Funktionen sind immer die Schnittpunkte der Funktion mit der Winkelhalbierenden (siehe Abb. 69) und können damit leicht gefunden werden:

$$M \stackrel{!}{=} M_0 \left(1 - \left(1 - \frac{M}{M_0} \cos \alpha \right) e^{-\frac{TR}{T1}} \right). \quad (210)$$

Es ergibt sich also für den *steady-state-Zustand*:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{1 - e^{-\frac{TR}{T1}}}{1 - \cos \alpha \cdot e^{-\frac{TR}{T1}}}. \quad (211)$$

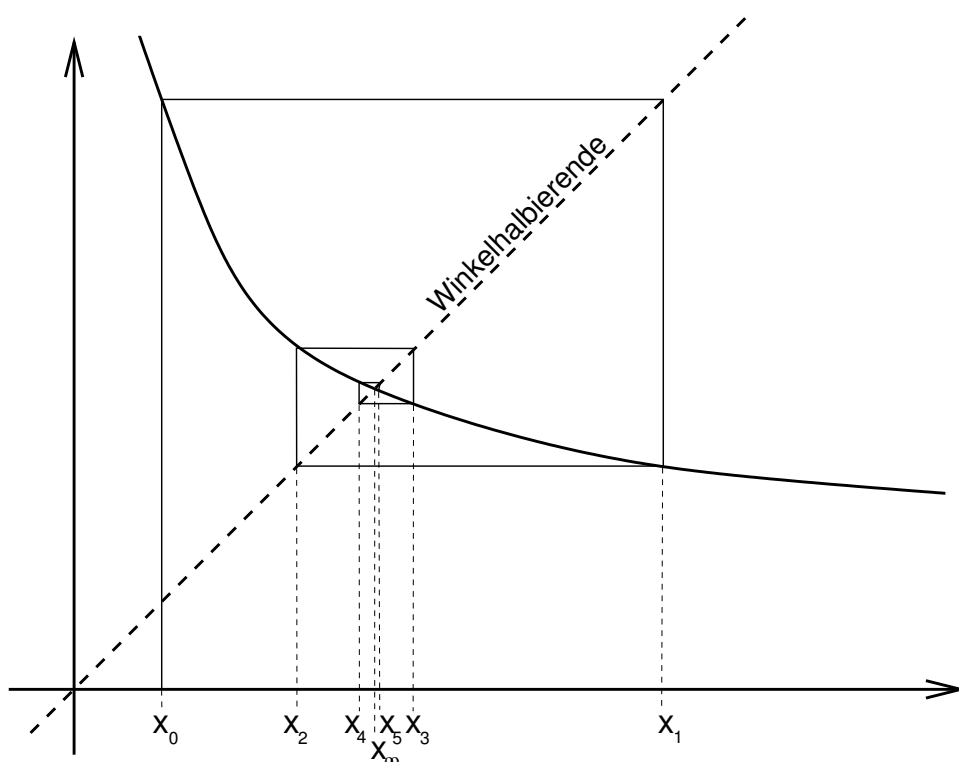


Abbildung 69: Vorgang beim Iterieren einer Funktion $f(x)$ in der Form $f(f(f(\dots(x)\dots)))$. Wenn der Funktionswert beim jeweils nächsten Schritt als Argument verwendet werden soll, muß er von der Ordinate auf die Abszisse übertragen werden; dies geschieht mittels Spiegelung an der Winkelhalbierenden. Der Iterationsvorgang wechselt dann anschaulich zwischen Funktion und Winkelhalbierenden; es ist evident, daß der Fixpunkt gerade der Schnittpunkt von Funktion und Winkelhalbierender ist. Damit der Fixpunkt x_∞ anziehend ist, d.h. damit er im Laufe der Iteration auch tatsächlich angenommen wird, muß zusätzlich für die Funktion gelten: $\left| \frac{d}{dx} f \Big|_{x_\infty} \right| < 1$.

C Das Dipolfeld

Hier soll nun eine einfache Näherung angegeben werden für das Feld eines elektrischen oder magnetischen Dipols. Diese beiden Fälle besitzen die identische mathematische Form.

Das Dipolfeld werde gebildet aus Punktladungen μ_n , die im elektrostatischen Fall jeweils einzeln das bekannte $1/r$ -Potential erzeugen; das Gesamtpotential φ aus N Punktladungen ist dann davon die Summe:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}. \quad (212)$$

Für den Fall $1/|\vec{r} - \vec{r}_n| \ll 1$ läßt sich eine lineare Näherung verwenden; allgemein gilt:

$$f(\vec{r} - \vec{r}_n) \approx f(\vec{r}) - \vec{r}_n \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}); \quad (213)$$

dies angewendet auf Gl. (212) liefert:

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_n \mu_n - \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_n \mu_n \vec{r}_n. \quad (214)$$

Im konkreten Fall eines Dipols, bestehend aus zwei Punktladungen gleichen Betrags und verschiedenen Vorzeichens, d.h. $\mu_1 = +\mu$, $\mu_2 = -\mu$, und mit der Definition des Dipolmoments $\vec{d} := \mu \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ wird Gl. (214) zu

$$\varphi(\vec{r}) \approx 0 - \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} = + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (215)$$

Wie gesagt – diese Näherung ist nur für $1/|\vec{r} - \vec{r}_n| \ll 1$ gültig, d.h. wenn der Abstand vom Dipol groß ist gegenüber dessen inneren Abmessungen.

Für ein zu einem Potential $\varphi(\vec{r})$ korrespondierendes Feld $\vec{F}(\vec{r})$ gilt allgemein:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}), \quad (216)$$

also folgt dafür im Rahmen der gemachten Näherung:

$$\vec{F}(\vec{r}) \approx \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}|^3}. \quad (217)$$

Die Stärke eines Dipolfeldes nimmt also mit $1/r^3$ mit dem Abstand ab. In Abb. 70 ist die Richtung der sich ergebenden Feldlinien dargestellt; Abb. 71 zeigt die Form der Linien konstanter Feldstärke.

Ist das Dipolmoment in z -Richtung orientiert, also $\vec{d} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$, findet man für die einzelnen Komponenten (in Kugelkoordinaten):

$$F_z \approx \frac{d}{r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1); \quad (218)$$

$$F_{xy} \approx 3 \frac{d}{r^3} \cos \vartheta; \quad (219)$$

$$F_r \approx 2 \frac{d}{r^3} \cos \vartheta; \quad (220)$$

$$F_\vartheta \approx -\frac{d}{r^3} \sin \vartheta. \quad (221)$$

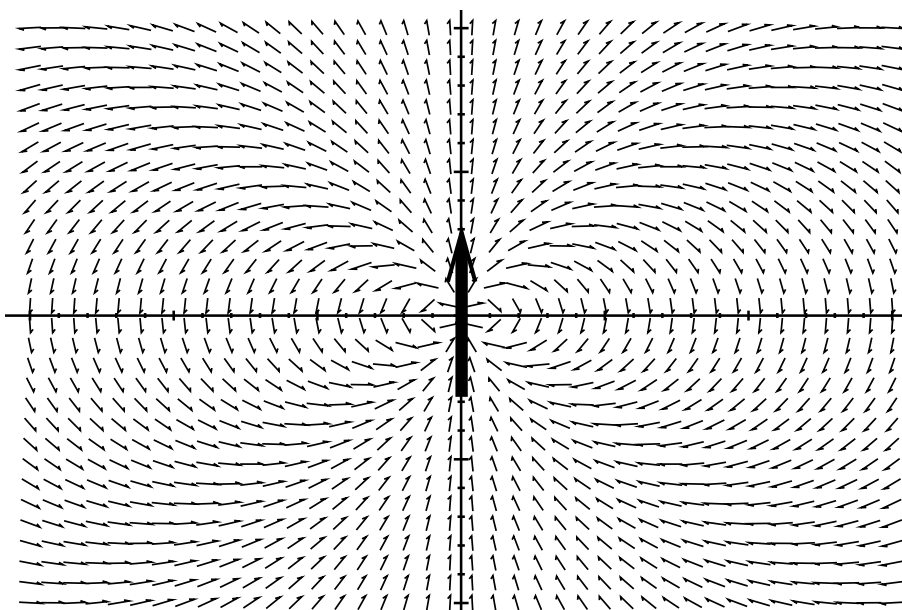


Abbildung 70: Richtungsfeld eines Dipols.

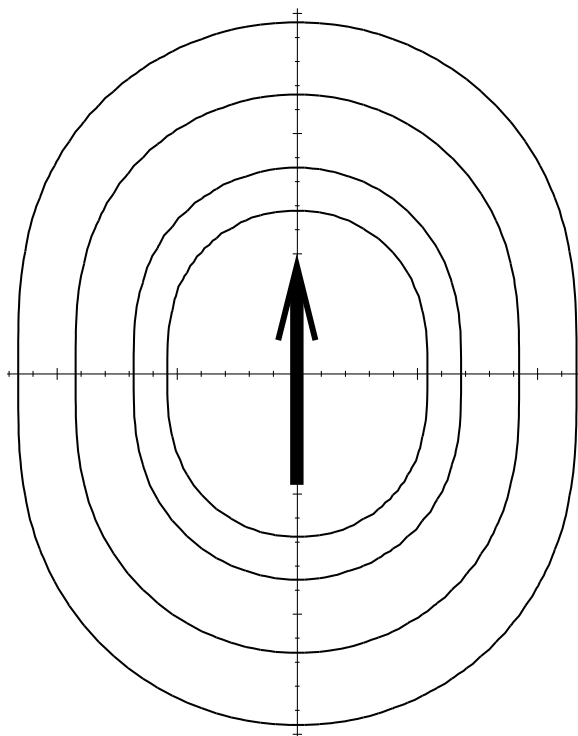


Abbildung 71: Linien konstanter Feldstärke eines Dipols.

D Verwendete Bezeichnungen

ω	: Winkelgeschwindigkeit; ν : (Zeit-)Frequenz; $\omega = 2\pi\nu$;	A.1
k	: k -Raum-Variable; κ : Ortsfrequenz; $k = 2\pi\kappa$;	A.1
i	: imaginäre Einheit;	
σ	: Signaldichte, Maßzahl für lokale Signalstärke pro Volumenelement; (oder: Standardabweichung);	3.3.2
ρ	: Protonendichte im Gewebe (PD);	
S	: Maßzahl für Stärke des Gesamtsignals nach Anregung;	
G_i	: i te Komponente eines Feldgradienten; $i = x, y, z$ bzw. $i = \text{R(ead), P(hase), S(lice)}$;	3.2
$T1, T2, T2^*$: gewebeabhängige Relaxationszeiten;	2.2
TR, TE, α	: Meßparameter;	4
B	: allg. Bezeichnung für Magnetfeld (eigentlich: Magnetische Flußdichte, Einheit: Tesla);	
M	: allg. Bezeichnung für Magnetisierung;	
$A \implies B$: aus A folgt B ;	
$A \iff B$: A ist gleichbedeutend mit B ;	
$A := B$: A wird definiert als B ;	
$A \stackrel{!}{=} B$: A wird gleichgesetzt mit B (Ansatz);	
$A \equiv B$: A equivalent zu / identisch mit B ;	
$A \sim B$: A ist proportional zu B ;	
$A \approx B$: A ist ungefähr B ;	
$a \circ \bullet A$: A ist Fourier-Transformierte von a ;	A.1
$A \bullet \circ a$: a ist Fourier-Rücktransformierte von A .	A.1

Soweit möglich wurde die folgende Konvention verwendet:

- Kleinbuchstaben bezeichnen Funktionen im Zeit- oder Ortsraum;
- Großbuchstaben benennen die jeweils zugehörigen Fourier-Transformierten.

Abbildungsverzeichnis

1	Beispiele für Kernspintomographen. Vom Aufbau her handelt es sich um typische Konstruktionen mit Tunnel.	2
2	Beispiele für „offenere“ Bauarten von Kernspintomographen – bei denen allerdings technische Kompromisse eingegangen werden müssen.	3
3	Links: Modellvorstellung des Kernspin als Kreisel. Rechts: Präzessionsbewegung eines Spins im Magnetfeld (dicker Pfeil entspricht hier dem magnetischen Moment) bzw. eines gekippten Kreisels im Schwerfeld (dicker Pfeil entspricht dann der Kreiselachse). Die Präzession erfolgt mit der sog. Larmorfrequenz ω_L	4
4	$T1$ -Relaxation. Die Magnetisierung orientiert sich zunehmend wieder in Richtung zum Hauptfeld in z -Richtung.	7
5	$T2$ -Relaxation. Zunehmende gegenseitige Dephasierung der Spins, bzw. der Magnetisierung.	8
6	Modellhafte Darstellung der kontrollierten Auslenkung des Magnetisierungsvektors \vec{M} ; im Resonanzfall bewegt sich die Spitze des Magnetisierungsvektors für eine gewisse Strecke längs der spiralförmigen Kurve aus der $+z$ -Richtung in die $-z$ -Richtung (senkrechte Achse). Die Länge dieser Strecke (Zeitdauer des Pulses) und die Ganghöhe der Spirale (Stärke des Pulses) bestimmen die gegen die z -Achse erzielte Auslenkung, den sog. „Flip-Winkel“.	10
7	Modellhafte Darstellung der Relaxation des Magnetisierungsvektors \vec{M}	11
8	Niveaufspaltung der Spinzustände im Magnetfeld.	12
9	Die Beträge der Winkelanteile einiger Terme der Gleichung (51), radial angetragen: a) $P_1^0(\cos \vartheta)$, b) $P_2^0(\cos \vartheta)$, c) $P_2^1(\cos \vartheta) \cos \varphi$, d) $P_3^0(\cos \vartheta)$, e) $P_3^1(\cos \vartheta) \cos \varphi$ f) $P_3^2(\cos \vartheta) \cos 2\varphi$	15
10	Schematische Darstellung des MR-Tunnels mit der Stromrichtung der Gradientenspulen für den y -Gradienten. Das Prinzip besteht darin, daß der Stromfluß zu beiden Seiten des Tunnels in die gleiche Richtung zeigt. Für den x -Gradienten ist die Anordnung um 90° gedreht.	17
11	Schematische Darstellung des MR-Tunnels mit der Stromrichtung der Gradientenspulen für den z -Gradienten.	17
12	Schichtauswahl durch Anlegen eines Gradienten: Die Resonanzbedingung, und damit die Möglichkeit der Anregung, ist nur in einer zum Gradienten senkrechten Schicht gegeben, deren Schichtdicke Δz von der Gradientenstärke G_z und der Bandbreite $\Delta\omega$ der eingestrahlten Frequenz abhängt.	19
13	Schädel, jeweils identische transversale Schnittführung. Die drei Grundkontraste: $T1$, $T2$ und PD (Protonendichte).	22

14	Pulsdiagramm: Schematische Darstellung der Gradientenschaltung und des resultierenden Kernspinsignals bei Gradientenechosequenzen. Die Stärke des Gradienten G_y wird sukzessive verändert, um den k -Raum zeilenweise zu scannen. Unmittelbar vor der nächsten Anregung (α -Puls) sind typischerweise noch sog. „Spoiler“ geschaltet, das sind Gradienten und HF-Pulse, die die Spindephasierung verstärken, um verbliebene Netto-Magnetisierung in x - y -Richtung zu zerstören (nicht dargestellt).	23
15	Entsprechende Bewegung im k -Raum bei Gradientenecho-Sequenzen. Die Datenerfassung findet jeweils zwischen den Punkten B und C statt.	24
16	Abhängigkeit der Signalstärke von Repetitionszeit TR und Flipwinkel α	25
17	Abhängigkeit des Ernst-Winkels α_E von der Repetitionszeit TR und die sich ergebenden Parameter-Domänen.	27
18	Die Wirkung eines Inversionspulses bzgl. der xy -Komponenten der Spins: Umkehrung der Reihenfolge (und damit Inversion der relativen Phasenwinkel) bei gleichbleibender Präzessionsrichtung.	28
19	Pulsdiagramm: Schematische Darstellung der Gradientenschaltung bei Spinechosequenzen und des resultierenden Kernspinsignals. Die Stärke des Gradienten G_y wird sukzessive verändert, um den k -Raum zeilenweise zu scannen. Unmittelbar vor der nächsten Anregung (90° -Puls) sind typischerweise noch sog. „Spoiler“ geschaltet, das sind Gradienten und HF-Pulse, die die Spindephasierung verstärken, um verbliebene Netto-Magnetisierung in x - y -Richtung zu zerstören (nicht dargestellt).	29
20	Zugehörige Bewegung im k -Raum bei Spinecho-Sequenzen. Die Datenerfassung findet jeweils zwischen den Punkten C und D statt.	30
21	Parameterdomänen der einzelnen Wichtungen.	31
22	Zur Parameterwahl von $T1$ - und $T2$ -Wichtung.	32
23	Schematische Darstellung der Spektralen Dichteverteilung $J(\omega)$. Deren Breite hängt ab von der inneren Mobilität und der Temperatur. Zu einem festen Argument ω_0 gibt es eine bestimmte Breite einer solchen normierten Verteilung, bei der der zugehörige Funktionswert $J(\omega_0)$ maximal wird; typischerweise liegt der Wert dieses Arguments dann in der Größenordnung der Standardabweichung.	34
24	Relaxationszeiten in Abhängigkeit von der inneren Mobilität der jeweiligen Substanz.	35
25	$T2$ -gewichtetes Bild von Eiswürfel in Wasser. Während Wasser durch eine lange $T2$ -Zeit ein helles Signal gibt, erfolgt die $T2$ -Relaxation im Eis so schnell, daß von dort kaum ein Signal ausgeht. (Die $T1$ -Zeit von Eis ist außerdem so lang, daß Sättigung unvermeidlich ist.)	36

26	Modell „Harfe“: Eine ungleichmäßige Verteilung der Saiten kann direkt durch Frequenzanalyse des Gesamtklages bestimmt werden. (Dies gilt nur unter der unmusikalischen Annahme, daß sich die Frequenz der Saiten linear mit dem Ort ändert ...)	37
27	Fourier–(Rück-)Transformierte einzelner Punkte im k –Raum mit ihren k –Vektoren. Im Bildraum ergeben sich ebene Wellen mit definierter Richtung, Amplitude und Phase. (Die Darstellung hier ist schematisch.)	39
28	Fourier–Rücktransformation (Schädel, T1, sagittal). Stellvertretend für den k –Raum sind die Beträge der k –Raum–Daten $ F(\vec{k}) $ (links) und das daraus resultierende Betragsbild $ f(\vec{x}) $ (rechts) gezeigt.	39
29	Zentrumsferne Daten im k –Raum sind gelöscht, es fehlen die hohen Frequenzen im Ortsraum; im daraus resultierenden Bild sind die Kontraste noch erhalten, aber die Auflösung hat sich massiv verschlechtert („Tiefpass“).	40
30	Die zentrumsnahen k –Raum–Daten sind gelöscht; es fehlen die niedrigen Frequenzen im Ortsraum; folglich gehen die Kontraste verloren, aber die Auflösung bleibt erhalten („Hochpass“).	40
31	Die Situation bei der Berechnung von MR–Bildern. Die Datensätze besitzen identische Dimensionierung. Die Richtung der Fast–Fourier–Transformation (FFT) ist prinzipiell auch umkehrbar, d.h. die beiden (komplexwertigen!) Datensätze sind gleichberechtigt.	41
32	Eine abzubildende Test–Struktur ($f_L(x)$) als Relief. Der graue Rahmen bezeichnet den Bildausschnitt, der tatsächlich dargestellt werden soll; man beachte, daß ein Teil der Struktur „übersteht“. Auch solche Strukturen jenseits des zu erzeugenden Bildes geben natürlich ein Signal.	43
33	Das mittels endlicher Fourier–Reihe rekonstruierte Bild der Test–Struktur ($\tilde{f}_L(x)$) unter Berücksichtigung der ersten 2 (hellgrau), 10 (dunkelgrau) und 25 (schwarz) Fourier–Terme. Wegen der impliziten Periodizität der Fourier–Reihe tauchen überstehende Strukturen am gegenüberliegenden Bildrand wieder auf.	43
34	Generelle Zuordnung der Spindephasierung im Ortsraum zur entsprechenden Position im k –Raum.	45
35	Einträge im k –Raum bei einem homogenen und einem periodischen Meßobjekt. Hier zeigt sich auch anschaulich der Zusammenhang von k –Vektor und Ortsauflösung.	45
36	Beispiel für einen Einfalt–Artefakt. In Phasenrichtung sind die überstehenden Partien des Kopfes auf der jeweils gegenüberliegenden Bildseite eingeklappt. (Ohne weitere Maßnahme würde auch der Hals vom oberen Bildrand her einfalten.)	46
37	Der Gibbs–Artefakt – theoretisch und praktisch.	47

- 38 Beispiel für Bewegungsartefakte. Die Bereiche der bewegten Augen und einiger Gefäße sind in Phasenrichtung verschmiert. Es macht deshalb in diesem Fall Sinn, als Phasenrichtung links/rechts zu wählen. (Eine kurze Bewegung des Kopfes würde die gesamte Messung verderben.) 48
- 39 Chemische Verschiebung zwischen Fett und Wasser bei 1.5 Tesla Magnetfeldstärke. Das Fett in der oberen Phase verschiebt sich zunehmend in Auslese- richtung mit abnehmender Auslesebandbreite. Im Bild beträgt die verwendete Auslesebandbreite (v.l.n.r.) 100Hz/Pixel, 50Hz/Pixel, 30Hz/Pixel, 20Hz/Pixel. 49
- 40 Auslöschung der Phasen von Fett- und Wassersignal. Verwendet wurde hier das selbe Messphantom wie in Abb. 39, nur anfangs stark geschüttelt, um eine Vermischung von Fett und Wasser zu erreichen. Abgebildet sind die Stadien der Entmischung nach verschiedenen Zeiten (ca. je eine Minute, fortschreitend von links nach rechts). Das sehr helle Signal des Wassers stammt von einer Anreicherung mit Kontrastmittel (Gadolinium). Verwendet wurde eine Echozeit $TE=2.38\text{ms}$, um bei einem 1.5T-Gerät eine Phasendifferenz von π zu erreichen. 50
- 41 Suszeptibilitäts- und Metallartefakte bei einer Gradientenechosequenz (oben) und einer Spinechosequenz (unten). Gezeigt sind jeweils drei Kunststoffdübel in Wasser: Ein Dübel alleine (links), ein Dübel mit einer 5cm langen Titanschraube (mitte), wie sie für medizinische Zwecke verwendet wird, ein Dübel mit einem knapp 1mm^3 großen ferromagnetischen Partikel (rechts). Vor allem bei der Gradientenechosequenz machen sich schon beim alleinigen Dübel die Suszeptibilitätsartefakte in Form von Auslöschungen bemerkbar. 52
- 42 Suszeptibilitäts- bzw. Metallartefakte bei einer Gradientenechosequenz in Abhängigkeit von Auflösung und Echozeit. Verwendet wurde dasselbe Phantom wie in Abb. 41; gezeigt ist ein „Referenzbild“ (mitte), ein Bild mit größeren Voxel (links), bzw. eines mit verkürzter Echozeit (rechts). 53
- 43 Dritter-Arm-Artefakts. Außerhalb der Homogenitätskugel fällt der Gradient steil ab, und so können bestimmte Bedingungen für Gradienten in weiteren als dem beabsichtigten Raumbereich erfüllt sein (vgl. Abb. 12). 53
- 44 Bildstörungen durch Spikes. Das Bild ist mit einem regulären Wellenmuster überlagert. 54
- 45 Bildstörungen durch externe HF-Einstrahlung. In Phasenrichtung zieht sich eine Spur durch das Bild, ähnlich einem Reißverschluß. 55
- 46 ADC-Überlauf-Artefakt. Das Bild ist mit einem Grauschleier überlagert. 56
- 47 Prinzip des Magic-Angle-Phänomens. Unter einem bestimmten Winkel verschwinden die z -Komponenten; bei entsprechender gegenseitiger Orientierung findet somit über die z -Komponenten keine Wechselwirkung statt. 57

48	Magic–Angle–Phänomen in Sehngewebe ($T1$ –Gradientenecho–Sequenz). Das Phantom besteht aus Sehnen, die auf eine Rolle gewickelt sind. Gezeigt ist ein Schnitt senkrecht zur Wicklungsachse. Die beiden Bilder stammen aus zwei identischen Messungen am selben Phantom; zwischen den Messungen wurde das Phantom aber in der Bildebene um ca. 40° gedreht, um Strukturen, die stets ein starkes Signal geben (z.B. Fett, jeweils rechts), identifizieren zu können. Das Sehngewebe an sich ist äußerst signalarm; unter dem „magischen Winkel“ (relativ zum Feld, gestrichelte Linien) ergeben sich aber die Signalanhebungen. (Der Durchmesser des Phantoms beträgt ca. 5cm.)	58
49	Bildverzerrung durch nichtlineare Gradienten (links). Das gemessene Phantom besteht aus rechteckigen Strukturen! Durch Korrekturalgorithmen kann das Bild „verschönert“ werden (rechts).	59
50	Schema einer Multischichtmessung am Beispiel einer Spinechosequenz. . .	61
51	Schema einer Multiechomessung mit einer Echozuglänge von Drei am Beispiel einer Spinechosequenz.	62
52	Mögliche Art der Abtastung im k –Raum bei Multiechosequenzen (schematisch). Mit den Echos weiterer Anregungen werden die Zeilen dazwischen erfaßt. Die Reihenfolge der Zeilen kann – je nach geforderter effektiver Echozeit TE_{eff} – anders gewählt werden.	62
53	Schema des zeilenweisen Auffüllens eines 3D–Datenblocks im k –Raum. Es gibt hier zwei Phasenkodierrichtungen und eine Ausleserichtung, dafür aber keine Schichtselektion.	64
54	Das grundsätzliche Ergebnis einer MR–Messung nach der Rücktransformation (Schädel, T2, sagittal): Ein Betragsbild (links) und ein Phasenbild (rechts); der Phasenwinkel ist dabei in Graustufen kodiert. Das „Schneegeästör“ im Phasenbild rührt von einer zufälligen Phasenverteilung her (da dort kein Signal); Bewegungsartefakte werden deshalb dort am ehesten sichtbar.	64
55	Die Symmetrie des k –Raums bei rein reellwertigem Ortsraum: Der Wert an einem Punkt ist zu dem an seinem punktsymmetrischen Spiegelbild komplex konjugiert.	65
56	Mögliche Anwendungen der Half–Fourier–Technik: Reduktion der Zahl der gescannten Zeilen (links), oder Reduktion der Zeilenlänge (rechts).	65
57	Beispiel für einen nur begrenzt „ausgeleuchteten“ Bereich in einem Wasserphantom durch ein einzelnes Spulenelement. Diese Ortsabhängigkeit wird mit dem Empfindlichkeitsprofil $C(x, y)$ mathematisch beschrieben. (Die Fensterung wurde so gewählt, daß auch das Auslaufen des Empfindlichkeitsprofils sichtbar ist, deshalb ist der zentrale Bereich massiv überstrahlt.)	67

58	Mögliche Differenzvektoren im k -Raum zur Berechnung der nicht gemessenen Zeilen.	68
59	Bei der Fourier-Interpolation wird nur die zentrale Hälfte des k -Raum-Bereichs gemessen, der der zugrundegelegten Auflösung entspricht. Der restliche Teil wird mit dem Wert 0 aufgefüllt.	70
60	Grobe Digitalisierung einer Funktion. Die Auflösung beträgt gerade eine Längeneinheit.	71
61	Digitalisierung der sinc-Funktion in feiner Auflösung (halbe Längeneinheit); die sinc-Funktion selbst entspricht der ursprünglichen, groben Auflösung.	71
62	Vergleich: Ursprüngliche Funktion, grobe Digitalisierung, Ergebnis nach Faltung (dick, schwarz). Es zeigt sich ein Effekt wie bei einer Interpolation.	72
63	Bei Überlagerung mit einer geeigneten Glockenfunktion ist die Stufenfunktion nicht mehr relevant.	72
64	Wirkung des Streufeldes im einfachen Modell einer Senke.	73
65	Beispiele für Kontaktstellen, die bei der Patientenlagerung vermieden werden sollten.	75
66	Die sinc-Funktion und dessen Stammfunktion, ausgedrückt mit dem Integralsinus $\text{Si}(\pi x)/\pi$	84
67	Das Ergebnis der Faltung einer Stufenfunktion mit einer sinc-Funktion: Der Effekt von Kantenoszillationen.	85
68	Ergebnis der Faltung einer Stufenfunktion mit einer Gausskurve: Effekt einer Glättung.	87
69	Vorgang beim Iterieren einer Funktion $f(x)$ in der Form $f(f(f(\dots(x)\dots)))$. Wenn der Funktionswert beim jeweils nächsten Schritt als Argument verwendet werden soll, muß er von der Ordinate auf die Abszisse übertragen werden; dies geschieht mittels Spiegelung an der Winkelhalbierenden. Der Iterationsvorgang wechselt dann anschaulich zwischen Funktion und Winkelhalbierenden; es ist evident, daß der Fixpunkt gerade der Schnittpunkt von Funktion und Winkelhalbierender ist. Damit der Fixpunkt x_∞ anziehend ist, d.h. damit er im Laufe der Iteration auch tatsächlich angenommen wird, muß zusätzlich für die Funktion gelten: $\left \frac{d}{dx} f \Big _{x_\infty} \right < 1$	91
70	Richtungsfeld eines Dipols.	93
71	Linien konstanter Feldstärke eines Dipols.	93

Literatur

- [1] P. A. RINCK. *Magnetresonanz in der Medizin*. ABW Wissenschaftsverlag, Berlin, 5. Auflage, 2003.
- [2] W. R. NITZ. *Der Radiologe* **9**, 745–763 (2003).
- [3] G. SCHATZ und A. WEIDINGER. *Nukleare Festkörperphysik*. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [4] K. JÄNICH. *Analysis für Physiker und Ingenieure*. Springer–Verlag, Berlin, 1. Auflage, 1983.
- [5] M. ABRAMOWITZ und I. A. STEGUN (EDS.). *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, Washington, 10. Auflage, 1972.
- [6] M. T. VLAARDIGERBROEK und J. A. DEN BOER. *Magnetic Resonance Imaging*. Springer, Berlin, 1996.
- [7] W. G. BRADLEY und D. D. STARK. *Magnetic Resonance Imaging*. C.V.Mosby, St.Louis, 1999.
- [8] M. REISER und W. SEMMLER. *Magnetresonanztomographie*. Springer, Berlin, 2002.
- [9] H. MORNEBURG. *Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik*. Publicis MCD, München, 1995.
- [10] B. P. COWAN. *Nuclear magnetic resonance and relaxation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Auflage, 1997.
- [11] I. N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 2. Auflage, 1995.
- [12] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING und B. P. FLANNERY. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage, 1992.
- [13] D. W. MCROBBIE, E. A. MOORE, M. J. GRAVES und M. R. PRINCE. *MRI From Picture to Proton*. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Auflage, 2003.
- [14] S. J. ERICKSON, R. W. PROST und M. E. TIMIS. *Radiology* **188**, 23 (1993).
- [15] O. DIETRICH, K. NIKOLAOU, B.J. WINTERSPERGER, W. FLATZ, M. NITTKA, R. PETSCH, B. KIEFER und S.O. SCHOENBERG. *electromedica* **70:2**, 133–146 (2002).
- [16] M. GOYEN und S. G. RUEHM. *Moderne Kontrastmittelverstärkte Magnetresonanztomographie*. UNI–MED Verlag, Bremen, 1. Auflage, 2004.

- [17] BUNDESAMT FÜR STRAHLENSCHUTZ. Empfehlungen zur Vermeidung gesundheitlicher Risiken bei Anwendung magnetischer Resonanzverfahren in der medizinischen Diagnostik, 1996.
- [18] A. C. KAK und M. SLANEY. *Prinziples of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, New York, 1. Auflage, 1987.
- [19] H. STÖCKER. *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 2. Auflage, 1993.
- [20] L. RÅDE und B. WESTERGREN. *Springers Mathematische Formeln*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 2000.
- [21] B. M. JAWORSKI und A. A. DETLAF. *Physik griffbereit*. Vieweg, Braunschweig, 1. Auflage, 1972.
- [22] DEUTSCHE BUNDESBANK. 10 Deutsche Mark, 1991. Vergriffen.
- [23] H. BLEY. *Kompendium Medizin+Technik*. Forum Medizin, Gräfelfing, 1994.