

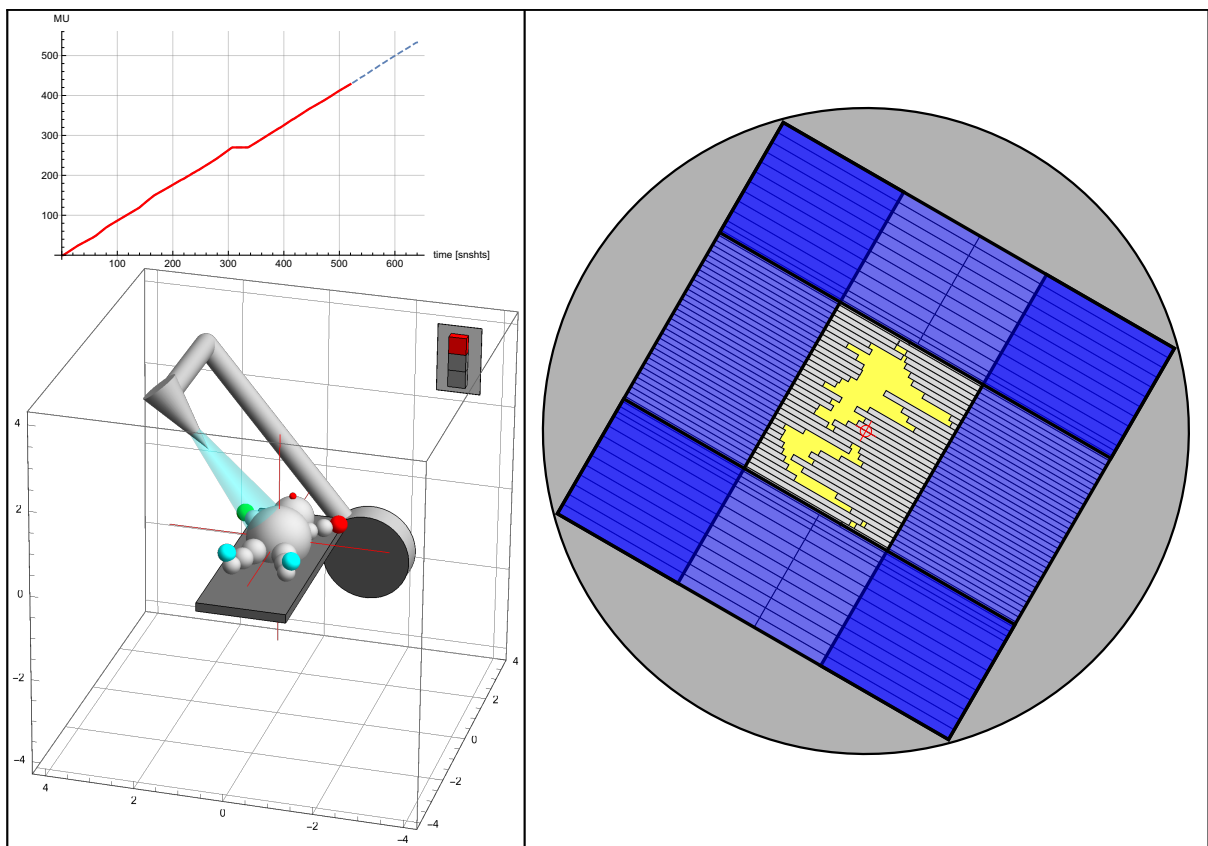
Kleine Theorie zur Strahlentherapie

— Ein mathematisch/strahlenphysikalischer Eintopf —

Autor: henrik.schachner@strahlentherapie-weilheim.de

Kompilierungszeit: [Samstag, 3. Februar 2024 – 20:08]

Textsatz: \LaTeX



<https://www.youtube.com/channel/UCpj0-ThMMozERwbhs1bUAPw>



Ganz grundsätzlich muß zuallererst **Richard Stallman** (Free Software Foundation, GNU Project), **Linus Torwalds** (Linux-Kernel), **Prof. Dr. Donald Knuth** (T_EX, uvm.) und **den vielen anderen aus der open-source-Gemeinde** gedankt werden, ohne deren gewaltige Vorleistung das Erstellen eines solchen Dokuments deutlich weniger Spaß machen würde.

---work in progress!---

Wichtiger Hinweis / Disclaimer:

Die Medizintechnik unterliegt einer rasanten Entwicklung. Der Autor hat größte Sorgfalt auf die Korrektheit der gemachten Aussagen verwandt. Da jedoch menschliche Irrtümer und Druckfehler nie völlig auszuschließen sind, wird hierfür keinerlei Gewähr übernommen. Jede/r ist aufgefordert, alle Angaben in eigener Verantwortung auf ihre Richtigkeit zu überprüfen. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Warenbezeichnungen oder Handelsnamen in diesem Skriptum berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen-Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.



<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Diese Dokument ist lizenziert unter der Creative-Commons-Lizenz „Namensnennung 4.0 international“.

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Werkzeuge	1
1.1	Fourier und Faltung	1
1.1.1	Fourier-Transformation	1
1.1.2	Faltung und Faltungssatz	5
1.2	Wichtige Funktionen	8
1.2.1	Diracsche Deltafunktion	8
1.2.2	Rechtecksfunktion und sinc-Funktion	9
1.2.3	Dreiecksfunktion	10
1.2.4	Gaussfunktion	11
1.2.5	Kammfunktion, Fourierreihe, FFT	12
1.2.6	$(1/x)$ -Funktion	16
1.2.7	Gedämpfte Schwingung, Lorentzfunktion	17
1.2.8	Voigt- und PseudoVoigt-Funktion	18
1.2.9	Heaviside-Funktion, Kausalitätsprinzip	19
1.2.10	Kleine Fourier-Sammlung	21
1.3	Weitere Integraltransformationen	23
1.3.1	Laplace-Transformation	23
1.3.2	Hilbert-Transformation	25
1.3.3	Hankel-Transformation	25
1.3.4	Abel-Transformation	27
1.4	Noch mehr Fourier	29
1.4.1	Fourier-Schicht-Theorem, Radon-Transformation	29
1.4.2	Hermite-Polynome als Eigenfunktionen	30
1.4.3	Lemma von Jordan	33
1.4.4	Gibbs-Wilbraham-Phänomen	34
1.5	Statistik – Grundlagen	38
1.5.1	Grundlagen der Grundlagen	38
1.5.2	Momenterzeugende und charakteristische Funktion, Additionssatz	41
1.5.3	Binomialverteilung	42
1.5.4	Poissonverteilung	43
1.5.5	Gaussverteilung	43
1.5.6	Exponentialverteilung, Erlang-Verteilung	44
1.5.7	Zentraler Grenzwertsatz	47

1.5.8	Stichproben und Fehlerrechnung	48
1.6	Etwas Systemtheorie	52
1.6.1	LTI-Systeme: esf, lsf, psf und MTF	52
1.6.2	MTF, CTF und die Coltman-Formeln	56
1.6.3	Abtasttheorem	57
1.6.4	Erfassung von Messwerten	60
1.7	Invertierung von Faltungsoperationen	62
1.7.1	Fourier-Invertierung	62
1.7.2	Iterativer Ansatz	65
1.7.3	Bewertung	68
2	Physikalische Grundlagen der Dosimetrie	69
2.1	Wechselwirkung von Photonen mit Materie	69
2.1.1	Schwächungskoeffizient und Streuquerschnitt	69
2.1.2	Elementare Wechselwirkungsprozesse	71
2.2	Wechselwirkung von Elektronen mit Materie	81
2.2.1	Bedeutung des Stoßparameters	81
2.2.2	Bremsvermögen	83
2.3	Fluenz und Spektrum	90
2.4	Kerma, Cema und Dosis	93
2.5	Dosimetrische Grundgleichungen	94
2.5.1	Von Photonenfluenz zu Kerma und Dosis	94
2.5.2	Von Elektronenfluenz zu Cema und Dosis	97
2.6	Dosismessung mit Ionisationskammern	98
2.6.1	Effektiver Messort von Kompaktkammern	102
3	Photonenstrahlung und Dosisverteilung	104
3.1	Aufbaueffekt	104
3.2	Charakterisierung der Tiefendosis	105
3.3	Dosisquerprofil	109
3.4	Faktoren zur Dosisbeschreibung	109
3.5	Konzept der äquivalenten Feldgröße	113
3.6	Äquivalente Feldgröße und Output-Faktoren	115
3.7	Analytische Beschreibung der TPR	116
4	Betrachtung der Dosisdeponierung als LTI-System	119
4.1	Fluenz-Dosis-Faltungskern	119
4.2	Lorentzfunktion als empirischer Streukern	120
4.3	Abschätzung interessanter Größen	124
4.3.1	Halbschattenbreite	124
4.3.2	Sinnvolle Minimal-Breite von MLC-Leafs	124
4.3.3	Rechenraster bei Dosisberechnung	125
4.4	Empirische Bestimmung der Halbwertsbreite	126

5	Faltungskern von Ionisationskammern	129
5.1	Gaussfunktion als Faltungskern	129
5.2	Rückfaltung des Gausskerns	130
5.2.1	Quasikontinuierliche Abtastung	130
5.2.2	Diskrete Abtastung	132
5.2.3	Abschätzung des Volumen-Störfaktors bei Ionisationskammern	133
6	Aspekte der Rotationsbestrahlung	137
6.1	Berechnung des Dosisprofils	137
6.2	Das inverse Problem	138
6.2.1	Ein einzelnes Dosislevel	140
6.2.2	Ein Dosislevel mit „Verfügungsgebiet“	140
6.2.3	Zwei Dosislevels	141
6.3	Approximation durch Standard-Rotationen	143
6.4	„Inverse Planung“ unter Rotationssymmetrie	145
6.5	Zugang mittels Fourier-Transformation	149
6.6	„3D-Rotation“	150
7	Fluenzmodulation	155
7.1	Keilfilter	155
7.1.1	Prinzip des Universal-Keilfilters	156
7.1.2	Implementierung dynamischer Keile	158
7.1.3	Keilfilterfaktoren	159
7.2	Dynamische MLC-Bewegung	161
8	Anhang / Sonstiges	164
8.1	Gamma-Evaluation	164
8.1.1	Grundlegende Idee	164
8.1.2	Gamma-Fehler durch Messung	169
8.2	Generalized Equivalent Uniform Dose	171
8.3	Treffertheorie und Dosiseffektkurve	172
8.4	Linear-Quadratisches Modell	173
8.5	Diagnostische Tests und Vorhersagewerte	176
	Literatur	179

Kapitel 1

Mathematische Werkzeuge

1.1 Fourier und Faltung

1.1.1 Fourier–Transformation

Die Fourier–Transformation ist nicht nur grundlegend im Bereich der Bildverarbeitung, sondern sie stellt ein ausgesprochen universell einsetzbares mathematisches Werkzeug dar.

Die Fourier–Transformation ist eine komplexwertige Integraltransformation einer Funktion $f(x)$ in eine andere Funktion $F(\kappa)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{+2\pi i \kappa x} d\kappa, \quad F(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \kappa x} dx, \quad (1.1)$$

(wobei $x, \kappa \in \mathbb{R}$). Inhaltlich gesehen handelt es sich bei $f(x)$ und $F(\kappa)$ eigentlich nicht um zwei *verschiedene* Funktionen, sondern lediglich um eine *unterschiedliche Darstellung* dessen, was eine Funktion eben auszudrücken vermag.

Es macht dabei keinen prinzipiellen Unterschied, ob es sich um eine Transformation von einem Ortsraum x in einen Ortsfrequenz–Raum κ handelt (wie in Gl. (1.1)), oder von einem Zeit–Raum t in einen Frequenz–Raum ν :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{+2\pi i \nu t} d\nu; \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt. \quad (1.2)$$

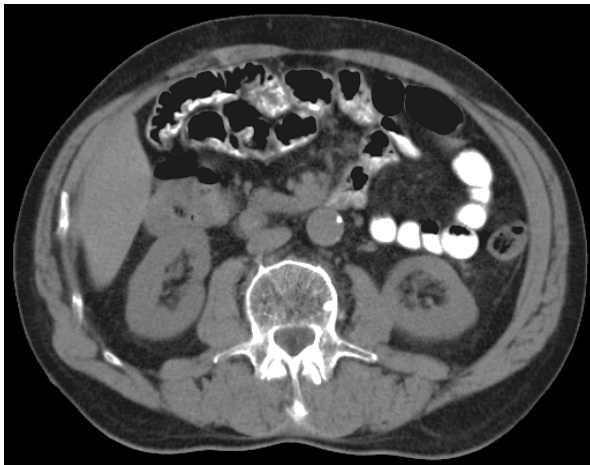
Im Folgenden soll dafür die Kurzschreibweise

$$f(t) \circ\!\!\!\rightarrow F(\nu), \quad \text{bzw.} \quad f(x) \circ\!\!\!\rightarrow F(\kappa) \quad (1.3)$$

verwendet werden, so wie es in der Standard–Literatur (z.B. [1]) üblich ist.

Hier muss noch ein wichtiger Begriff genannt werden: Der *k–Raum* bezeichnet den Raum der neuen Variablen κ . (Genaugenommen heißt diese Variable tatsächlich k , und es gilt der Zusammenhang $2\pi\kappa = k$; aber bei deren Verwendung sind bei allen Rechnungen lästige Vorfaktoren zu berücksichtigen.) Die Variable κ hat im Sinne von Gl. (1.1) die Bedeutung der Zahl der Wellenlängen pro Längeneinheit,

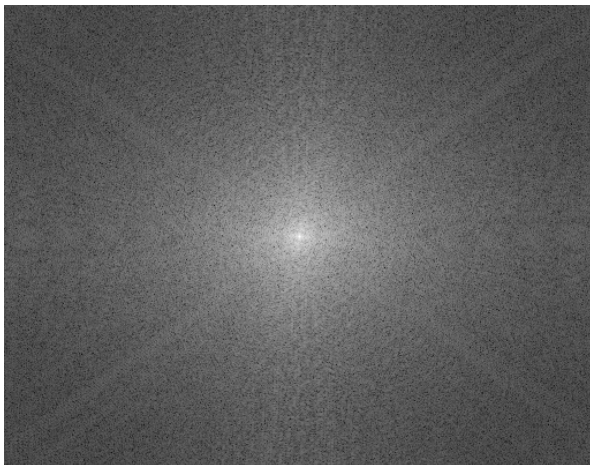
in vollständiger Analogie zur Frequenz ν , die die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit angibt. Generell wird der Raum, in den auf diese Weise transformiert wird, als *Fourier-Raum* bezeichnet. Wie schon der Begriff „Raum“ impliziert, kann die Transformation auch höherdimensional sein; die Größen x und κ sind dann als Vektoren aufzufassen. Ein Beispiel für eine zweidimensionale Transformation ist in Abb. 1.1 gezeigt. Da eine Fourier-Transformation stets komplexwertig ist, im Bild aber nur eine reelle Größe (der Grauwert) dargestellt wird, sind also auf beiden Seiten der Transformation immer zwei Bilder anzusetzen: Jeweils eines für Real- und eines für Imaginärteil, oder – wie in den Beispielbildern – für Betrag und für Phase. (Zu einem „normalen“ Bild gehört für die Transformation – zumindest konzeptionell – immer auch ein Phasenbild mit konstanter Phase.)



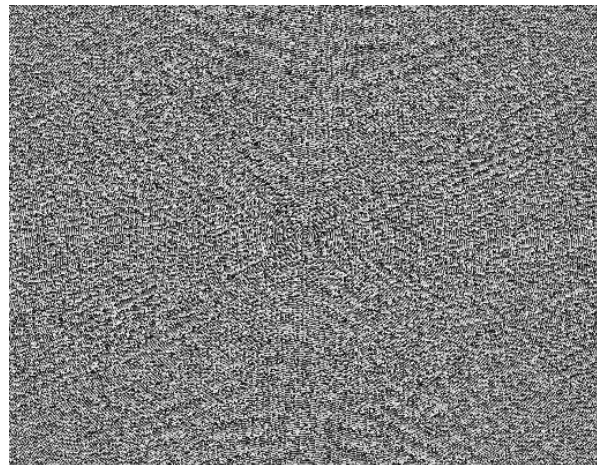
(a) Funktion im Ortsraum: Betragsbild.



(b) Phasenbild (konstante Phase $\phi = 0$).



(c) Fourier-Transformierte: Betragsbild.



(d) Fourier-Transformierte: Phasenbild.

Abbildung 1.1: Beispiel für Fourier-Transformation einer 2dim. Funktion („Bild“). Bei den Phasenbildern ist der Phasenwinkel in Graustufen kodiert.

Aus den Gleichungen (1.1) und (1.2) erschließt sich im Grunde auch sofort die Bedeutung dieser Transformation: Es handelt sich um eine Zerlegung der jeweiligen Funktion in komplexwertige Wellen der Form $e^{2\pi i \nu t}$, bzw. der Form $e^{2\pi i \kappa x}$; eine Fourier-Transformierte beschreibt also immer auch das Spektrum von Frequenzen, aus denen sich eine Funktion zusammensetzt. Diese wichtige Interpretation der Fourier-Transformierten ist in den Abbn. 1.11 bis 1.12 anhand eines Bildes demonstriert, das

periodische Strukturen enthält.

Es ist nicht gesichert, dass die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(x)$ überhaupt existiert, wenn nicht die folgenden Bedingungen gelten (siehe z.B. [2]):

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$; (Absolut-Integrabilität über beliebige Gebiete)
- in einem endlichen Intervall besitzt $f(x)$ nur endlich viele Unstetigkeiten und Extrema;
- $f(x)$ besitzt keine unendlichen Unstetigkeiten.

Eine Funktion, die diese Bedingungen nicht erfüllt, kann dennoch eine Fourier-Transformierte besitzen, wenn sie hervorgeht aus dem Limes einer Folge von Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen; dies trifft z.B. für die Deltafunktion (siehe unten) zu.

Wie durch direktes Nachrechnen leicht zu zeigen ist, gelten für die Fourier-Transformation die folgenden Rechenregeln (mit $f_n \circ \bullet F_n$):

$$\text{Linearität: } a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) \quad \circ \bullet \quad a_1 \cdot F_1(\kappa) + a_2 \cdot F_2(\kappa); \quad (1.4)$$

$$\text{Verschiebungssatz: } f(x - x_0) \quad \circ \bullet \quad F(\kappa) e^{-i2\pi\kappa x_0}; \quad (1.5)$$

$$F(\kappa - \kappa_0) \quad \bullet \circ \quad f(x) e^{+i2\pi\kappa_0 x}; \quad (1.6)$$

$$\text{Ähnlichkeitssatz: } f(ax) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\kappa}{a}\right); \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (1.7)$$

$$F(a\kappa) \quad \bullet \circ \quad \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right); \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (1.8)$$

$$\text{n-te Ableitung: } f^{(n)}(x) \quad \circ \bullet \quad (+2\pi i \kappa)^n F(\kappa) \quad (1.9)$$

$$F^{(n)}(\kappa) \quad \bullet \circ \quad (-2\pi i x)^n f(x). \quad (1.10)$$

Vor allem die Gln. (1.9) und (1.10) haben interessante Konsequenzen: Ist z.B. die Fourier-Transformation einer Funktion $f(x)$ bekannt, dann kennt man auch die von $f(x)x^n$. In dieser Weise führt außerdem die Transformation einer Differenzialgleichung zu einer algebraischen Gleichung, was eine mögliche Lösungsstrategie sein kann.

Wichtige Zusatzinformationen lassen sich durch die Betrachtung von Symmetrien ableiten (z.B. [3]):

$$f(x) \quad \text{reell, dann} \quad F(-\kappa) = F^*(\kappa); \quad (1.11)$$

$$f(x) \quad \text{imaginär, dann} \quad F(-\kappa) = -F^*(\kappa); \quad (1.12)$$

$$f(x) \quad \text{gerade, dann} \quad F(\kappa) \quad \text{gerade}; \quad (1.13)$$

$$f(x) \quad \text{ungerade, dann} \quad F(\kappa) \quad \text{ungerade}; \quad (1.14)$$

Diese Relationen lassen sich auch kombinieren, z.B. gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ reell und gerade} &\implies \\ &F(-\kappa) = F^*(\kappa) \quad \text{und} \quad F(-\kappa) = F(\kappa) \\ &\implies F(\kappa) \text{ reell und gerade.} \end{aligned}$$

Jede beliebige reelle Funktion $f(x)$ lässt sich schreiben als Summe einer geraden $g(x)$ und einer

ungeraden Funktion $u(x)$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{g(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{u(x)}; \quad (1.15)$$

die Fourier- $\left\{ \begin{array}{l} \text{hin} \\ \text{rück} \end{array} \right\}$ -Transformation einer beliebigen reellen Funktion wird damit zu:

$$F(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mp i2\pi\kappa x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) + u(x)) (\cos(2\pi\kappa x) \mp i \sin(2\pi\kappa x)) dx = \quad (1.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) \cos(2\pi\kappa x) \mp i u(x) \sin(2\pi\kappa x)) dx; \quad (1.17)$$

alle weiteren Terme verschwinden, da es sich dabei um die Integration (mit symmetrischen Grenzen) von ungeraden Funktionen handelt. Der essentielle Unterschied zwischen einer Hin- und einer Rücktransformation liegt also in der Verknüpfung der beiden verbliebenen Terme im Ausdruck (1.17) („–“ für „hin“, „+“ für „rück“). Insbesondere ergibt sich dann für reelle, gerade Funktionen g und G , dass die Richtung der Transformation nicht relevant ist; es gilt dann also

$$g(x) \circ \bullet G(\kappa) \iff G(x) \circ \bullet g(\kappa). \quad (1.18)$$

In der gleichen Weise findet man für reelle, ungerade Funktionen u und U :

$$\begin{aligned} u(x) \circ \bullet -iU(\kappa) &\iff U(x) \circ \bullet -iu(\kappa); \\ \implies u(\kappa) \bullet \circ +iU(x). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Allgemein lässt sich die Transformation bei einer komplexwertigen Funktion f schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) \circ \bullet \int & [(\Re(f(x)) \cos(2\pi\kappa x) + \Im(f(x)) \sin(2\pi\kappa x)) \\ & + i \cdot (-\Re(f(x)) \sin(2\pi\kappa x) + \Im(f(x)) \cos(2\pi\kappa x))] dx; \end{aligned} \quad (1.20)$$

Daraus folgt dann für die Transformierte der komplex konjugierten Funktion:

$$f^*(x) \circ \bullet F^*(-\kappa). \quad (1.21)$$

Als wichtiger Zusammenhang zwischen Funktion und Transformierter ist das *Parseval Theorem* (oder *power theorem*) zu nennen:

$$\int f(x)g^*(x)dx = \int F(\kappa)G^*(\kappa)d\kappa. \quad (1.22)$$

Bewiesen werden kann dies mit Hilfe des Faltungssatzes (vgl. Gl. (1.35)). Im speziellen Fall, dass beide Funktionen identisch sind, wird dies zum *Plancherel Theorem* (oder *Rayleigh Theorem*):

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |F(\kappa)|^2 d\kappa. \quad (1.23)$$

Die **Fourier–Transformation einer L –periodischen Funktion** liefert ein diskretes Spektrum von Werten (sog. *Fourier–Zerlegung*):

$$f_L(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{+2\pi i \kappa_k x} \quad \circ \! \! \! \bullet \quad F_k = \frac{1}{L} \int_L f_L(x) e^{-2\pi i \kappa_k x} dx, \quad \text{wobei} \quad \kappa_k := \frac{k}{L}; \quad (1.24)$$

der Abstand $\Delta\kappa$ dieser diskreten Werte ergibt sich aus:

$$\Delta\kappa = \kappa_{k+1} - \kappa_k = \frac{1}{L}. \quad (1.25)$$

Die – bisher vorgestellte – *kontinuierliche* Fourier–Transformation ist sinnvoll und angenehm für analytische Überlegungen; was aber in der Realität – numerisch in einem Computer – stattfindet, ist immer die **diskrete endliche Fourier–Transformation**:

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{+2\pi i \frac{nk}{N}} \quad \circ \! \! \! \bullet \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} \quad (1.26)$$

Orts- und k –Raum sind hier also in N Punkten diskretisiert, und für die Ortsauflösung Δx gilt dann:

$$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta k} = \frac{1}{\mathcal{K}}. \quad (1.27)$$

(Mit \mathcal{K} ist die Größe des erfassten k –Raums gemeint, analog zur Größe L des erfassten Ortsraums.) Für die diskrete Fourier–Transformation gelten die oben genannten Zusammenhänge analog. Mit der Kammfunktion III (Kap. 1.2.5) ist eine elegante Herleitung davon möglich.

1.1.2 Faltung und Faltungssatz

Unter Faltung – ausgedrückt durch das Symbol „ $*$ “ – versteht man mathematisch die Verknüpfung zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in der folgenden Weise:

$$(f_1 * f_2)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi. \quad (1.28)$$

Die Operation der Faltung besitzt angenehme Eigenschaften (z.B. [1]): Sie ist

$$\begin{aligned} \text{kommutativ:} & \quad f_1 * f_2 = f_2 * f_1; \\ \text{assoziativ:} & \quad (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3); \\ \text{distributiv, linear:} & \quad f_3 * (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 f_3 * f_1 + c_2 f_3 * f_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}). \\ \text{Ableitung:} & \quad (f_1 * f_2)' = f_1' * f_2 = f_1 * f_2'. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Die besondere Bedeutung der Faltung besteht in ihrem Bezug zur Fourier–Transformation: Sei $g \circ \! \! \! \bullet G$ und $h \circ \! \! \! \bullet H$ (siehe Gl. (1.3)), dann gilt:

$$\boxed{g \cdot h \circ \! \! \! \bullet G * H, \quad \text{und umgekehrt:} \quad G \cdot H \bullet \! \! \! \circ g * h.} \quad (1.30)$$

Dies ist der *Faltungssatz*. Die Fourier-Transformierte eines Produkts ist also die Faltung der Einzel-Fouriertransformierten, und die Fourier-Transformierte einer Faltung ist das Produkt der Einzel-Fouriertransformierten. Der Faltungssatz ist in diesem Kontext ein zentrales Werkzeug. Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \int dx \int d\xi g(\xi)h(x-\xi)e^{\alpha x\kappa} &= \int d\xi \int dx h(x-\xi)e^{\alpha x\kappa} g(\xi) \underbrace{\gamma := x-\xi}_{=} \\ &= \int d\xi \int d\gamma h(\gamma)e^{\alpha\gamma\kappa} g(\xi)e^{\alpha\xi\kappa} = G(\kappa)H(\kappa). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (1.31)$$

Für ein Produkt aus Funktionen nach *verschiedenen* Variablen kann die folgende Darstellung günstig sein:

$$f_1(x)f_2(y)f_3(z) = f_1(x)\delta(y)\delta(z) * \delta(x)f_2(y)\delta(z) * \delta(x)\delta(y)f_3(z); \quad (1.32)$$

daraus lässt sich z.B. sofort ableiten (mit $f_i(x) \circ \bullet F_i(\kappa)$):

$$f_1(x)f_2(y)f_3(z) \circ \bullet F_1(\kappa_x)F_2(\kappa_y)F_3(\kappa_z). \quad (1.33)$$

Bemerkenswert ist ferner die Faltung mit einer harmonischen Oszillation $e^{2\pi i\kappa x}$, die zu einer Fourier-Transformation führt (mit $f \circ \bullet F$):

$$e^{2\pi i\kappa x} * f(x) = \int f(\xi)e^{2\pi i\kappa(x-\xi)}d\xi = e^{2\pi i\kappa x}F(\kappa). \quad (1.34)$$

Mit dem Faltungssatz lässt sich das *Parseval Theorem* (vgl. Gl. (1.22)) auf elegante Weise herleiten (unter Zuhilfenahme von Gl. (1.21)):

$$\begin{aligned} \int f(x)g^*(x)dx &= \int f(x)g^*(x)e^{2\pi i\kappa x}dx \Big|_{\kappa=0} = F(\kappa) * G^*(-\kappa) \Big|_{\kappa=0} = \\ &= \int F(\xi)G^*(\xi - \kappa)dx \Big|_{\kappa=0} = \int F(\xi)G^*(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Trivial, aber dennoch nicht uninteressant, ist die folgende Tatsache:

$$\begin{aligned} \int (f * g)(x)dx &= \int dx \int f(\xi)g(x-\xi)d\xi = \int d\xi f(\xi) \int g(x-\xi)dx = \\ &= \int f(\xi)d\xi \cdot \int g(x)dx; \end{aligned} \quad (1.36)$$

das Integral eines Faltungsprodukts ist also gleich dem Produkt der Einzelintegrale.

In **zwei Dimensionen** lautet die Faltung analog:

$$(f * g)(x, y) = \int f(\xi, \zeta)g(x-\xi, y-\zeta)d\xi d\zeta.$$

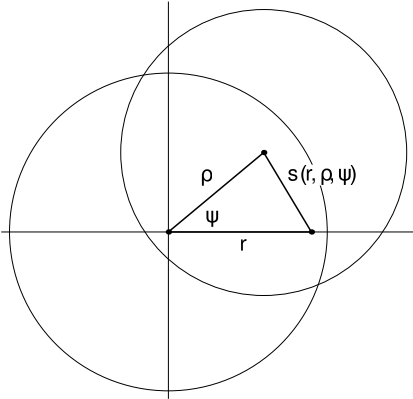
Sind die beteiligten Funktionen zudem rotationssymmetrisch, liegt die Verwendung von Polarkoordinaten nahe:

$$(f * g)(r, \phi) = \int f(\rho, \psi)g(r-\rho, \phi-\psi)\rho d\rho d\psi; \quad (1.37)$$

die Rotationssymmetrie gilt dann aber nicht mehr für die aus dem Symmetriezentrum verschobene Funktion. Das Ergebnis ist aber offensichtlich rotationssymmetrisch, d.h. $(f * g)(r, \phi) = (f * g)(r)$; der Ausdruck (1.37) wird unabhängig von ϕ und vereinfacht sich so (z.B. mit $\phi = 0$) zu

$$(f * g)(r) = \int f(\rho)g(r - \rho, -\psi)\rho \, d\rho d\psi;$$

in dieser Form kann die Rotationssymmetrie aber nicht wirklich ausgenutzt werden.



Mit Blick auf die eigentliche Bedeutung der Faltung als Summe von verschobenen und entsprechend gewichteten Funktionen kann auch geschrieben werden:

$$(f * g)(r) = \int f(\rho)g(s(r, \rho, \psi))\rho \, d\rho d\psi; \quad (1.38)$$

die Distanz s ergibt sich direkt aus dem Cosinussatz:

$$s(r, \rho, \psi) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi}.$$

Vor allem, wenn in den beteiligten Funktionen die Variable r schon quadratisch vorkommt, dann läßt sich die Integration über ψ oft direkt ausführen. Interessante Beispiele hierfür sind:

- Abstandsquadrat:

$$g(r) = \frac{1}{r^2} \implies \int_0^{2\pi} g(s(r, \rho, \psi)) \, d\psi = \frac{2\pi}{|r^2 - \rho^2|}; \quad (1.39)$$

- Lorentzfunktion (vgl. Kap. 1.2.7 und 4.2):

$$g(r) = \frac{1}{\pi\lambda} \cdot \frac{1}{(1 + r^2/\lambda^2)} \implies \int_0^{2\pi} g(s(r, \rho, \psi)) \, d\psi = \frac{2\lambda}{\sqrt{(r^2 - \rho^2)^2 + \lambda^2(2r^2 + 2\rho^2 + \lambda^2)}}; \quad (1.40)$$

- Lorentz–Punktspreizfunktion (vgl. Gl. (4.5)):

$$g(r) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \cdot \left(\frac{1}{1 + r^2/\lambda^2} \right)^{3/2} \implies \int_0^{2\pi} g(s(r, \rho, \psi)) \, d\psi = \frac{\lambda}{2\pi(r^2 + \rho^2 + \lambda^2)^{3/2}} \cdot \frac{4}{(1 - C)\sqrt{1 + C}} \cdot E\left(\frac{2C}{1 + C} \right); \quad (1.41)$$

die Funktion E bezeichnet das sog. *vollständige elliptische Integral* ([4]/(17.3.3)). Es gilt $C := (2r\rho)/(r^2 + \rho^2 + \lambda^2)$; mit $\{r, \rho, \lambda\} > 0$ folgt, dass stets $0 < C < 1$.

- radiale Gaussfunktion (vgl. Gl. (5.3)):

$$g(r) = \frac{1}{\pi\tau^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{\tau^2}} \implies \int_0^{2\pi} g(s(r, \rho, \psi)) \, d\psi = \frac{2}{\tau^2} \cdot e^{-\frac{r^2 + \rho^2}{\tau^2}} \cdot I_0\left(\frac{2r\rho}{\tau^2} \right); \quad (1.42)$$

bei der Funktion I_0 handelt es sich um die modifizierte Besselfunktion ([4]/(9.6.16)).

1.2 Wichtige Funktionen

1.2.1 Diracsche Deltafunktion

Mathematisch zählt die Diracsche Deltafunktion $\delta(x)$ zur Kategorie „uneigentlicher Objekte“; genau genommen lautet die korrekte Bezeichnung *Delta-Distribution*, dennoch wird sie häufig in der physikalischen Literatur als „Funktion“ bezeichnet. Üblicherweise wird die δ -Funktion definiert (z.B. [5]) als:

$$\delta(x) := \begin{cases} \infty & : x = 0; \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{wobei} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1.43)$$

Bei der Deltafunktion handelt es sich also um eine unendlich schmale, unbeschränkte Verteilungsfunktion, deren Integral gleich 1 ist.

Praktischerweise kann die Deltafunktion aufgefasst werden als Grenzfall von „gutartigen“ Funktionen, die die Bedingungen für die Existenz ihrer Fourier-Transformierten erfüllen; diese Funktionen sind auf 1 normiert und werden – um zu einer Deltafunktion zu gelangen – auf eine verschwindende Breite zusammengeschoben. Dies ist beispielsweise mit folgenden Funktionen möglich:

$$\delta(x) = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2} & \text{(Gaussfunktion)} \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a \sin(ax)}{\pi ax} & \text{(sinc-Funktion)} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} & \text{(Lorentzfunktion)} \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \begin{array}{c} \text{Rechteckfunktion} \\ \text{mit Höhe } a \text{ und Breite } \frac{1}{a} \end{array} & \text{(Rechteckfunktion)} \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \begin{array}{c} \text{Dreieckfunktion} \\ \text{mit Höhe } a \text{ und Basis } \frac{1}{a} \end{array} & \text{(Dreieckfunktion)} \end{cases} \quad (1.44)$$

Die Deltafunktion besitzt die folgende wichtige Eigenschaft:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad \text{mit } x_0 \in [a, b], \quad (1.45)$$

was auch als *Abtasteigenschaft der Deltafunktion* bezeichnet wird. (Genaugenommen handelt es sich bei Gl. (1.45) um die grundlegende *Definition* der Deltafunktion.) Wie damit leicht einzusehen ist, führt eine Faltung mit der δ -Funktion zu keiner Veränderung:

$$(\delta * f)(x) = f(x). \quad (1.46)$$

Die Deltafunktion ist wichtig und nützlich, da sie oft – in eben besagter Weise – als Grenzfall auftritt, und dann Rechnungen erheblich vereinfacht. Sie ist z.B. die Fourier-Transformierte (und also

das Frequenzspektrum) einer „monochromatischen“ Welle $e^{i2\pi\kappa_0x}$:

$$e^{i2\pi\kappa_0x} \circ \bullet \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\kappa_0x} e^{-i2\pi\kappa x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\kappa-\kappa_0)x} dx = \delta(\kappa - \kappa_0), \quad (1.47)$$

was durchaus anschaulich ist (einzelner Peak bei κ_0 im Spektrum), und tatsächlich auch rechnerisch wieder eine Deltafunktion ergibt; mit $\xi := 2\pi x$ gilt nämlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\kappa x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa\xi} d\xi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-i\kappa\xi}}{-i\kappa} \right]_{-T}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\kappa T)}{\kappa} = \delta(\kappa), \quad (1.48)$$

vgl. Gln. (1.44), (1.56) und Abb. 1.2. In analoger Weise gilt, dass die Deltafunktion gebildet wird aus der (gleich gewichteten) Summe *aller* Frequenzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{+2\pi i\kappa(x)} d\kappa = \delta(x); \quad (1.49)$$

sie beschreibt also den Grenzfall der Fourier-Transformierten einer konstanten Funktion. Die Konsistenz des oben Gesagten kann außerdem leicht eingesehen werden mit:

$$\int \delta(a) e^{\pm 2\pi i a b} da = 1; \quad \Rightarrow \quad \delta \circ \bullet \bullet \circ 1 \quad \Rightarrow \quad \int 1 \cdot e^{\pm 2\pi i a b} db = \delta(a).$$

Abschließend noch einige wichtige Rechenregeln:

$$x\delta(x) = 0; \quad (1.50)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}; \quad (x_k : \text{einfache Nullstellen von } f(x)); \quad (1.51)$$

insbesondere gilt damit:

$$\delta(x) = \delta(-x); \quad (1.52)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (1.53)$$

1.2.2 Rechtecksfunktion und sinc-Funktion

Sei eine Rechtecksfunktion der Breite 1 definiert als:

$$\Pi(x) := \begin{cases} 1 & : -\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2}, \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.54)$$

dann lässt sich die Fourier-Transformierte direkt berechnen:

$$\Pi(x) \circ \bullet \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi\kappa x} dx = \frac{1}{\pi\kappa} \sin(\pi\kappa). \quad (1.55)$$

Diese Funktion tritt in diesem Kontext so häufig auf, dass dafür eine eigene Bezeichnung gebräuchlich ist:

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & : x \neq 0, \\ 1 & : x = 0. \end{cases} \quad (1.56)$$

Die Fourier–Transformation der Rechtecksfunktion ist also die sinc–Funktion (Abb. 1.2). Es gilt:

$$\int_0^x \operatorname{sinc}(x) dx = \frac{\operatorname{Si}(\pi x)}{\pi}. \quad (1.57)$$

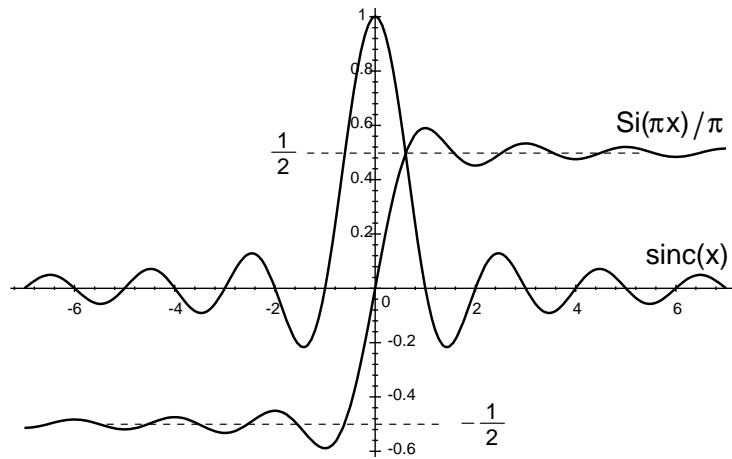


Abbildung 1.2: Die sinc–Funktion und dessen Stammfunktion, ausgedrückt mit dem Integralsinus $\operatorname{Si}(\pi x)/\pi$.

Die sinc–Funktion besitzt interessante Identitäten (z.B. [6]):

$$\operatorname{sinc}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{1}{(-x)! \cdot (x)!}; \quad (1.58)$$

die Funktion $(x)!$ ist dabei in Anlehnung an die Fakultät (für ganze Zahlen) und im Sinne von Gl. (1.201) zu verstehen.

1.2.3 Dreiecksfunktion

Die Dreiecksfunktion (Abb. 1.3) sei definiert als:

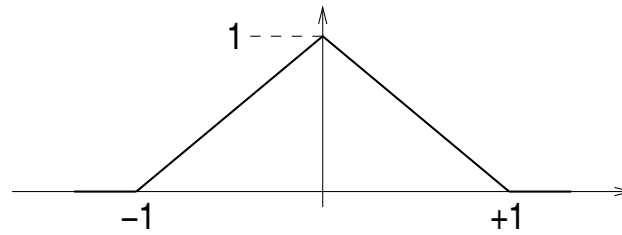
$$\Lambda(x) := \begin{cases} 1 + x & : -1 \leq x \leq 0; \\ 1 - x & : 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.59)$$

Es besteht hier ein enger Zusammenhang mit der Rechtecksfunktion:

$$\Lambda = \Pi * \Pi, \quad (1.60)$$

die Dreiecksfunktion ergibt sich also aus der Faltung zweier Rechtecksfunktionen. Deshalb lautet die Fourier–Transformierte der Dreiecksfunktion ganz einfach:

$$\Lambda(x) \circ \bullet \operatorname{sinc}^2(\kappa). \quad (1.61)$$

Abbildung 1.3: Die Dreiecksfunktion $\Lambda(x)$.

1.2.4 Gaussfunktion

Wie z.B. aus [7] bekannt, lautet die auf 1 normierte und symmetrische Gaussfunktion:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (1.62)$$

Dabei bezeichnet σ_x die Standardabweichung der Funktion, wenn man sie als Verteilung auffasst; dies ist natürlich auch ein Maß für deren Breite. Die Herleitung im Kontext einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in Kap. 1.5.5 skizziert.

Zur Gaussfunktion gibt es keine „einfache“ Stammfunktion, sondern dafür ist eine eigene Funktion, die sog. *Errorfunktion*, definiert:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (1.63)$$

Wichtig – und berechenbar – ist das Integral über ganz \mathbb{R} , also die Norm der Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy} \stackrel{r^2 := x^2 + y^2}{=} \sqrt{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr} = \sqrt{\pi}. \quad (1.64)$$

Die Fourier-Transformierte der Gaussfunktion lässt sich schreiben als:

$$\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \cos(2\pi\kappa x) dx = e^{-2\pi^2\sigma_x^2\kappa^2}; \quad (1.65)$$

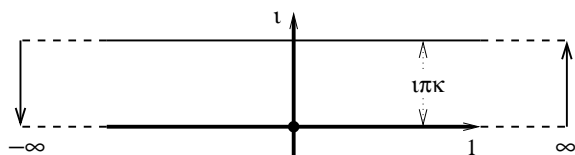
dieser Integralausdruck ist mit diesem Ergebnis in den Standard-Formelsammlungen (z.B. [8]) zu finden. Da die Gaussfunktion aber eine zu zentrale Rolle spielt, soll eine Herleitung dieses Integrals (mit Hilfe funktionentheoretischer Grundlagen) zumindest angedeutet werden. Es gilt:

$$e^{-x^2} \quad \circ \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-2\pi i\kappa x} dx = e^{-\pi^2\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\pi\kappa)^2} dx. \quad (1.66)$$

Zu berechnen ist also das Integral der Funktion e^{-z^2} längs einer um $i\pi\kappa$ zur reellen Achse verschobenen Geraden. Dazu ist grundsätzlich festzustellen:

$$e^{-z^2} \quad (z \in \mathbb{C}) \quad \text{besitzt keine Singularitäten} \quad \implies \quad \oint e^{-z^2} dz = 0; \quad (1.67)$$

das Integral längs einer beliebigen geschlossenen Kurve in \mathbb{C} verschwindet also. Ein sinnvoller Integrationsweg hat nun naheliegenderweise die folgende Form:



Dieser Weg enthält also das bekannte und das unbekannte Integral; zu bestimmen sind außerdem die Integralbeiträge der senkrechten Verbindungsstücke bei $\pm\infty$.

Dafür genügt es zu zeigen, dass der Betrag der Summe dieser Verbindungsstück-Integrale verschwindet:

$$\left| \int_0^{\pi\kappa} e^{-(x+iy)^2} dy + \int_{\pi\kappa}^0 e^{-(-x+iy)^2} dy \right| = \int_0^{\pi\kappa} \left(e^{-x^2+y^2} - e^{-x^2+y^2} \right) dy = 0;$$

bei den Verbindungsstücken heben sich deren Integralbeiträge somit gegenseitig auf. Die waagerechten Integrationswege führen folglich zu identischen Integrationsbeiträgen, d.h. das gesuchte Integral in Gl. (1.66) ergibt (mit Gl. (1.64)) schlicht ebenfalls $\sqrt{\pi}$. ■

Die Fourier-Transformierte einer Gaussfunktion ist also wieder eine Gaussfunktion mit der Standardabweichung

$$\sigma_\kappa = \frac{1}{2\pi\sigma_x}; \quad (1.68)$$

Die Breiten dieser Gaussfunktionen sind also zueinander umgekehrt proportional. Beide Funktionen sind „formgleich“¹, wenn $\sigma_x \equiv \sigma_\kappa = 1/\sqrt{2\pi}$; dann gilt

$$e^{-\pi x^2} \circ\text{---}\bullet e^{-\pi\kappa^2}. \quad (1.69)$$

Diese Funktionen sind außerdem normiert.

1.2.5 Kammfunktion, Fourierreihe, FFT

Die in Gl. (1.45) formulierte punktuelle Abtasteigenschaft der Deltafunktion kann in äquidistanten Abständen wiederholt werden. Da ein solches reguläres Abtasten einen typischen und häufig verwendeten Vorgang darstellt, ist dafür eigens eine Funktion (oder genauer: Distribution) definiert, die sog. (*Dirac-*)Kammfunktion $\text{III}(x)$:

$$\text{III}(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n). \quad (1.70)$$

Das kyrillische Zeichen III (sprich: „shah“) ist wegen dessen Ähnlichkeit mit der Funktion in der Literatur dafür üblich (z.B. [9]).

Die Kammfunktion weist ebenfalls die Besonderheit auf, dass sie ihre eigene Fourier-Transformierte darstellt:

$$\text{III}(x) \circ\text{---}\bullet \text{III}(\kappa). \quad (1.71)$$

¹Auf den ersten Blick mag diese Gleichheit der Funktionen auf beiden Seiten der Transformation als eine Besonderheit der Gaussfunktion erscheinen. Tatsächlich können aber beliebig viele Funktionen mit dieser Eigenschaft gefunden werden, z.B. Gln. (1.118)(1.119)(1.71 bzw. 1.120), oder allgemeiner: f gerade $\Rightarrow f(x) + F(x) \circ\text{---}\bullet F(\kappa) + f(\kappa)$. (Siehe auch Kap. 1.4.2)

Zum Beweis dafür könnte man versucht sein direkt anzusetzen:

$$\begin{aligned} \text{III}(x) &\circlearrowleft \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \delta(x-n) e^{-2\pi i \kappa x} dx = \sum_n e^{-2\pi i \kappa n} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-2\pi i \kappa N} \sum_{n=0}^{2N} e^{+2\pi i \kappa n} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi \kappa (2N+1))}{\sin(\pi \kappa)}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

(Die Summe wurde dabei mit der Formel für eine geometrische Reihe berechnet.) Das Problem ist hierbei, dass dieser Ausdruck nirgends konvergiert, d.h. diese Funktion existiert nicht.

Eine korrekte Beweisführung findet sich z.B. in [9]; diese soll hier skizziert werden: Man betrachtet dazu die Funktion

$$f_\tau(x) = e^{-\pi \tau^2 x^2} \frac{1}{\tau} \sum_n e^{-\pi(x-n)^2/\tau^2}. \quad (1.73)$$

Diese Funktion besteht also (für kleine Werte von τ) aus einer Reihe von normierten Gaussfunktionen, verschoben um jeweils eine Einheit, wobei τ ein Maß für deren Breite darstellt. Die Einhüllende davon ist ebenfalls eine Gaussfunktion, aber mit der Breite $1/\tau$, siehe Abb. 1.4. Für $\tau \rightarrow 0$ werden die

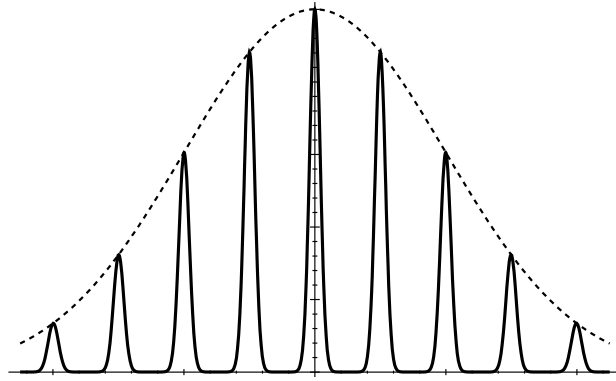


Abbildung 1.4: Die Funktion $f_\tau(x)$ als Approximation der Kammfunktion für $\tau \rightarrow 0$.

Gaussfunktionen unter der Summe zu Deltafunktionen; insgesamt handelt es sich also bei der Funktion $f_\tau(x)$ um eine Approximation der Kammfunktion:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} f_\tau(x) = \text{III}(x). \quad (1.74)$$

Da $|f_\tau(x)|$ integrabel ist, existiert davon nun sicher die Fourier-Transformierte. Für deren Berechnung lässt sich zunächst feststellen, dass der Summenterm in Gl. (1.73) gerade und periodisch ist, weshalb er in eine Fourier-Reihe (vgl. Gl. (1.24)), bzw. in eine Fourier-cos-Reihe entwickelt werden kann:

$$\sum_n e^{-\pi(x-n)^2/\tau^2} = \sum_k c_k e^{2\pi i k x}, \quad (1.75)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k = \int_{-1/2}^{+1/2} \sum_n e^{-\pi(x-n)^2/\tau^2} \cos(2\pi k x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2/\tau^2} \cos(2\pi k x) dx = \tau e^{-\pi k^2 \tau^2}. \quad (1.76)$$

Damit hat man nun erhalten:

$$f_\tau(x) = e^{-\pi\tau^2 x^2} \sum_k e^{-\pi k^2 \tau^2} e^{2\pi i k x}. \quad (1.77)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (1.65) und des Verschiebungssatzes (1.6) lässt sich die Fourier-Transformierte davon direkt hinschreiben:

$$f_\tau(x) \circ \bullet F_\tau(\kappa) = \frac{1}{\tau} \sum_k e^{-\pi k^2 \tau^2} e^{-\pi(\kappa-k)^2/\tau^2}. \quad (1.78)$$

Für den Beweis von Gl. (1.71) genügt es nun festzustellen, dass die Fourier-Transformierte $F_\tau(\kappa)$ in gleicher Weise wie die Funktion $f_\tau(x)$ eine Approximation der Kammfunktion darstellt, also:

$$\left(\lim_{\tau \rightarrow 0} F_\tau(\kappa) = \text{III}(\kappa) \right) \circ \bullet \left(\lim_{\tau \rightarrow 0} f_\tau(x) = \text{III}(x) \right). \quad \blacksquare \quad (1.79)$$

Bei der Verwendung der Kammfunktion soll typischerweise der Abstand der δ -Pulse frei gewählt werden können; dazu gehört sicherheitshalber die Anmerkung, dass *normierte* Pulse im Abstand a geschrieben werden müssen als

$$\frac{1}{|a|} \text{III} \left(\frac{x}{a} \right) \quad \left(= \sum_n \delta(x - n \cdot a) \right). \quad (1.80)$$

So schlicht die Kammfunktion auch definiert ist – bei ihrer Verwendung zeigt sich doch eine gewisse Eleganz: Wie gesagt, stellt die Multiplikation mit einer Funktion

$$\text{III}(x) \cdot f(x) = \sum_n \delta(x - n) f(x) \quad (1.81)$$

eine Abtastung dieser Funktion dar (diskrete Werte). Andererseits repräsentiert die Faltung mit einer Funktion

$$\text{III}(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \delta(x - \xi - n) f(\xi) d\xi = \sum_n f(x - n) \quad (1.82)$$

eine durch permanente Versetzung und Replikation erzeugte periodische Funktion (mit der Periode der Kammfunktion). Gemäß Gl. (1.71) findet man (mit $f(x) \circ \bullet F(\kappa)$):

$$\text{III}(x) \cdot f(x) \circ \bullet \text{III}(\kappa) * F(\kappa) \quad \text{bzw.} \quad \text{III}(x) * f(x) \circ \bullet \text{III}(\kappa) \cdot F(\kappa). \quad (1.83)$$

Mit anderen Worten:

- Die (Hin- oder Rück-)Transformation diskreter Werte führt auf eine periodische Funktion;
- die Transformation einer periodischen Funktion liefert diskrete Werte (die Fourier-Koeffizienten, bzw. ein Linienspektrum).

Man stößt also bereits mit der einfachen Funktion **III** auf ganz grundlegende Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Mit der Kammfunktion ist nun auch eine elegante **Herleitung der Fourier-Reihe** (Gl. (1.24)) aus der Fourier-Transformation möglich:

Sei eine L -periodische Funktion f gebildet durch Replikation einer Funktion f_L (mit endlichem Träger):

$$f(x) = \frac{1}{L} \text{III} \left(\frac{x}{L} \right) * f_L(x) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{L} L \cdot \text{III}(\kappa L) \cdot F_L(\kappa) = \frac{1}{L} \sum_k \delta \left(\kappa - \frac{k}{L} \right) \cdot F_L(\kappa). \quad (1.84)$$

Die Funktion f muss sich also schreiben lassen als Rücktransformierte:

$$f(x) = \frac{1}{L} \int \sum_k \delta \left(\kappa - \frac{k}{L} \right) \cdot F_L(\kappa) e^{2\pi i \kappa x} d\kappa = \frac{1}{L} \sum_k F_L \left(\frac{k}{L} \right) e^{2\pi i \frac{k}{L} x}. \quad (1.85)$$

F_L war dabei die Fourier-Transformierte der Funktion f_L , die nur in einem L -Intervall von Null verschieden ist, also:

$$F_L \left(\frac{k}{L} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(x) e^{-2\pi i \frac{k}{L} x} dx = \int_L f_L(x) e^{-2\pi i \frac{k}{L} x} dx. \quad (1.86)$$

Insgesamt findet man so für L -periodische Funktionen:

$$f(x) = \sum_k c_k e^{2\pi i \frac{k}{L} x}; \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{L} \int_L f_L(x) e^{-2\pi i \frac{k}{L} x} dx. \quad (1.87)$$

Von hier aus kann man noch einen Schritt weitergehen und betrachten, wie sich die Werte einer diskret abgetasteten L -periodischen Funktion transformieren. Seien die abgetasteten Werte also:

$$f_n = \left\{ f(0), f\left(\frac{L}{N}\right), f\left(2\frac{L}{N}\right), f\left(3\frac{L}{N}\right), \dots, f\left((N-1)\frac{L}{N}\right) \right\};$$

genau dies entspricht dem wichtigen Fall der technischen Anwendung und lässt sich schreiben als:

$$f_L(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{L}{N}n\right) \delta\left(x - \frac{L}{N}n\right) = \frac{L}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{L}{N}n\right) \delta\left(x - \frac{L}{N}n\right). \quad (1.88)$$

Mit Gl. (1.87) folgt dann:

$$F_k (:= c_k) = \frac{1}{L} \int_L \frac{L}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{L}{N}n\right) \delta\left(x - \frac{L}{N}n\right) e^{-2\pi i \frac{k}{L} x} dx = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{L}{N}n\right) e^{-2\pi i \frac{kn}{N}};$$

als wichtiges Ergebnis findet man so (vgl. Gl. (1.26)):

$$f\left(n\frac{L}{N}\right) =: f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \quad \circ \bullet \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}. \quad (1.89)$$

Für jede numerische Anwendung der Fourier-Transformation ist die sog. „**Fast-Fourier-Transformation**“ (**FFT**) von entscheidender Bedeutung, da hierdurch die Rechenzeiten stark verkürzt werden. Deshalb soll nun ein flüchtiger Blick auf die zugrundeliegende Idee geworfen werden:

Beispielhaftes Problem: Transformation der Sequenz aus Zahlen $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Dazu wird die Sequenz aufgespalten in eine, bestehend aus den ungeraden Termen:

$$\{a, c, e, g\} \quad \circ \bullet \quad \{A, C, E, G\}$$

diese Sequenz wird dann auf die ursprüngliche Länge „gestreckt“, in dieser Form gilt:

$$\{a, 0, c, 0, e, 0, g, 0\} \circ \bullet \{A, C, E, G, A, C, E, G\}.$$

Gleiches wird durchgeführt mit der Sequenz der geraden Terme:

$$\begin{aligned} \{b, d, f, h\} &\circ \bullet \{B, D, F, H\} \quad \text{und} \\ \{b, 0, d, 0, f, 0, h, 0\} &\circ \bullet \{B, D, F, H, B, D, F, H\}. \end{aligned}$$

Diese gestreckte Sequenz wird ausserdem noch um eine Stelle nach rechts verschoben:

$$\{0, b, 0, d, 0, f, 0, h, \} \circ \bullet \{B\gamma^0, D\gamma^1, F\gamma^2, H\gamma^3, B\gamma^4, D\gamma^5, F\gamma^6, H\gamma^7\}$$

mit $\gamma = e^{-2\pi i/8}$ (allgemein bei einer Verschiebung um v Stellen nach rechts und einer Sequenzlänge von N lautet dieser Phasenfaktor (vgl. Gl. (1.5)): $\gamma = e^{-2\pi i v/N}$). Das Ergebnis ist dann die Summe der berechneten Sequenzen:

$$\begin{aligned} \{a, b, c, d, e, f, g, h\} &= \{a, 0, c, 0, e, 0, g, 0\} + \{0, b, 0, d, 0, f, 0, h, \} \circ \bullet \\ &\circ \bullet \{A, C, E, G, A, C, E, G\} + \{B\gamma^0, D\gamma^1, F\gamma^2, H\gamma^3, B\gamma^4, D\gamma^5, F\gamma^6, H\gamma^7\}. \end{aligned}$$

Entscheidend ist die Einsparung an Multiplikationen: Um eine Sequenz der Länge N zu transformieren sind – wenn Gl. (1.26) direkt ausgeführt wird – N^2 Multiplikationen notwendig; dagegen mit der beschriebenen Prozedur nur ca. $N^2/2$. Die FFT nutzt diese Halbierung der Sequenzen successive (weshalb Potenzen von 2 als Sequenzlänge günstig sind), was zu einer weiteren Verbesserung führt.

1.2.6 (1/x)–Funktion

Die (1/x)–Funktion ist eine weitere Funktion mit einer interessanten Fourier–Transformierten:

$$\frac{1}{x} \circ \bullet I(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-2\pi i \kappa x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos(2\pi \kappa x)}{x} - i \frac{\sin(2\pi \kappa x)}{x} \right) dx; \quad (1.90)$$

der cos–Term ist antisymmetrisch, deshalb fällt er bei einer Integration mit symmetrischen Grenzen weg. Es bleibt also:

$$\begin{aligned} I(\kappa) &= -i \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T 2\pi \kappa \cdot \text{sinc}(2\kappa x) dx \quad \begin{array}{c} \underbrace{y = 2\kappa x} \\ \downarrow \\ \doteq \end{array} \quad -i\pi \lim_{T' \rightarrow \infty} \int_{-T'}^{T'} \text{sinc}(y) dy = \\ &= -i \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Si}(2\pi \kappa x) \Big|_{-T}^{+T} = -i \cdot \text{sgn}(\kappa) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -i\pi \cdot \text{sgn}(\kappa); \\ &\implies \frac{1}{x} \circ \bullet -i\pi \cdot \text{sgn}(\kappa). \end{aligned} \quad (1.91)$$

$\text{Si}(x)$ bezeichnet hier wieder den Integralsinus, vgl. Abb. 1.2, und $\text{sgn}(x)$ ist die Vorzeichenfunktion, d.h.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & : x < 0; \\ +1 & : x \geq 0. \end{cases} \quad (1.92)$$

Die Fourier–Transformierte der (1/x)–Funktion ist also abschnittsweise konstant.

1.2.7 Gedämpfte Schwingung, Lorentzfunktion

Eine häufig auftretende Funktion ist die gedämpfte Schwingung

$$f_{\nu_0}(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0; \\ e^{-t/T} e^{i2\pi\nu_0 t} & : t \geq 0. \end{cases} \quad (1.93)$$

(Wegen der in diesem Zusammenhang implizierten Zeitabhängigkeit werden hier die Variablen t und ν verwendet.) Die Fourier-Transformierte davon lässt sich direkt berechnen:

$$F_{\nu_0}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\nu_0}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1/T + i2\pi(\nu - \nu_0))t} dt = \frac{1/T - i2\pi(\nu - \nu_0)}{(1/T)^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}. \quad (1.94)$$

Man findet also für $F_{\nu_0}(\nu) = r(\nu) e^{i\phi(\nu)}$ als Betrag r und als Phase ϕ :

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}}, \quad \phi = -\arctan(2\pi T(\nu - \nu_0)); \quad (\Re F_{\nu_0} > 0). \quad (1.95)$$

Zur Berechnung der Bandbreite benötigt man die Intensitätsverteilung

$$r^2(\nu) = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2} \quad (\text{„Lorentzfunktion“}). \quad (1.96)$$

Die Lorentzfunktion taucht in ganz unterschiedlichem Kontext auf, weshalb sich ein genauerer Blick darauf lohnt. Schreibt man die Lorentzfunktion in der normierten Form

$$l(\lambda, x) := \frac{1}{\pi\lambda} \cdot \frac{1}{1 + (x/\lambda)^2}, \quad (1.97)$$

dann lautet davon die Stammfunktion:

$$\frac{1}{\pi\lambda} \int \frac{dx}{1 + (x/\lambda)^2} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (1.98)$$

Die Halbwertsbreite beträgt 2λ .

Nach Gl. (1.9) folgt: $f(-x) \circ\text{---}\bullet F(-\kappa)$, d.h. für die „symmetrisierte“ Form der Funktion in Gl. (1.93) gilt: $f(x) + f(-x) \circ\text{---}\bullet F(\kappa) + F(-\kappa)$, damit fällt aber der Imaginärteil notwendigerweise weg, also ergibt sich das schöne Ergebnis (vgl. auch Abb. 1.5):

$$\frac{1}{\pi\lambda} \cdot \frac{1}{1 + (x/\lambda)^2} \quad \circ\text{---}\bullet \quad e^{-2\pi\lambda|\kappa|} \quad (\lambda > 0) \quad (1.99)$$

Wie in Gln. (1.44) beschrieben, lässt sich eine Lorentzfunktion auch zur Approximation der Deltafunktion verwenden:

$$\delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{1}{\pi\lambda} \cdot \frac{1}{1 + (x/\lambda)^2} \quad (1.100)$$

Die Lorentzfunktion besitzt interessante Eigenschaften:

- Aus dem Faltungssatz und Gl. (1.99) folgt sofort:

$$l_{\lambda_1} * l_{\lambda_2} = l_{(\lambda_1 + \lambda_2)}; \quad (1.101)$$

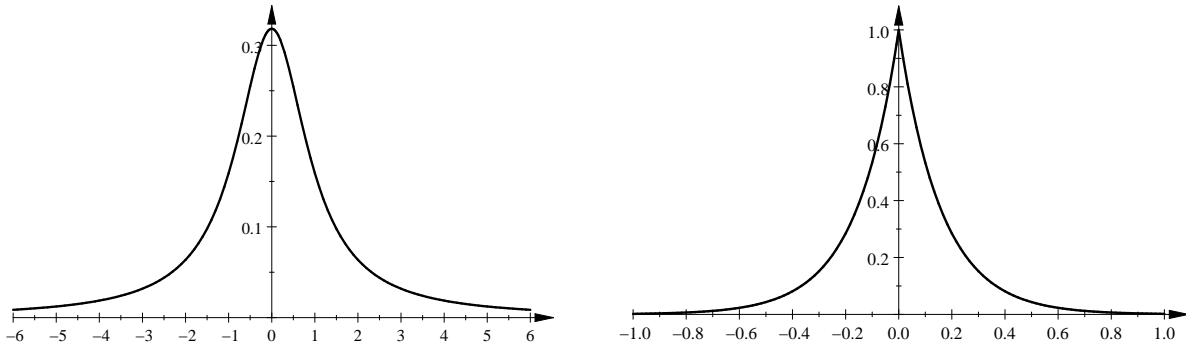


Abbildung 1.5: Die Lorentzfunktion und deren Fourier-Transformierte (mit $\lambda = 1$).

- als Verteilung aufgefasst, besitzt die Lorentzfunktion keine Standardabweichung (weil kein 2tes Moment, vgl. S. 40), denn:

$$\langle x^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^2 \cdot l_\lambda(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda}{\pi} \left(x - \lambda \arctan \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right) \right]_{-T}^T = \infty.$$

Weniger offensichtlich ist die Tatsache, dass auch kein Mittelwert existiert; es gilt zwar (und wird gerne genommen)

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x \cdot l_\lambda(x) dx = 0,$$

aber das liegt an der Symmetrie der Integrationsgrenzen. Wenn man davon abweicht, also z.B. schreibt

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{cT} x \cdot l_\lambda(x) dx = \frac{\lambda \ln(c)}{\pi} \quad (\text{mit } c > 0),$$

dann resultiert eine Abhängigkeit vom Parameter c , die nicht sein darf. In gleicher Weise existieren auch keine höheren Momente.

1.2.8 Voigt– und PseudoVoigt–Funktion

Die Voigt–Funktion $v(\sigma, \lambda, x)$ ergibt sich aus der Faltung einer Gauss–Funktion $g(\sigma, x)$ mit einer Lorentz–Funktion $l(\lambda, x)$ (vgl. Gln. (1.62) und (1.97)):

$$v(\sigma, \lambda, x) := g(\sigma, x) * l(\lambda, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot \pi\lambda} \cdot \left[\left(e^{-x^2/(2\sigma^2)} \right) * \left(\frac{1}{1 - (x/\lambda)^2} \right) \right],$$

was in geschlossener Form lautet:

$$v(\sigma, \lambda, x) = \frac{e^{\frac{(\lambda-ix)^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda-ix}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) + e^{\frac{(\lambda+ix)^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda+ix}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right)}{2\sqrt{2\pi}\sigma}. \quad (1.102)$$

Dabei bezeichnet 'erf' wieder die Errorfunktion (vgl. Gl. (1.63) – hier mit komplexwertigen Argumenten). Für die exakte Voigt–Funktion erhält man also einen ziemlich unhandlichen Ausdruck, mit dem nur schwer umzugehen ist.

Um dieses Problem abzuschwächen, gibt es für die Voigt-Funktion eine einfache Näherung (siehe z.B. [10]/Dokumentation), die interessanterweise aus einer Linearkombination einer Gauss- und einer Lorentz-Funktion besteht; diese Näherung bezeichnet man nun als PseudoVoigt-Funktion $v_p(\sigma, \lambda, x)$:

$$v_p(\sigma, \lambda, x) := (1 - \eta) \cdot g(\gamma, x) + \eta \cdot l(\gamma, x) \quad (1.103)$$

mit:

$$\begin{aligned} \gamma &:= (\lambda^5 + 0.07842\lambda^4\sigma + 4.47163\lambda^3\sigma^2 + 2.42843\lambda^2\sigma^3 + 2.69296\lambda\sigma^4 + \sigma^5)^{1/5}, \\ \eta &:= \frac{\lambda}{\gamma} \left(1.36603 - 0.47719\frac{\lambda}{\gamma} + 0.11116 \left(\frac{\lambda}{\gamma} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

In Abb. 1.6 ist die Voigt-Funktion und die PseudoVoigt-Funktion mit verschiedenen Parametersätzen gezeigt.

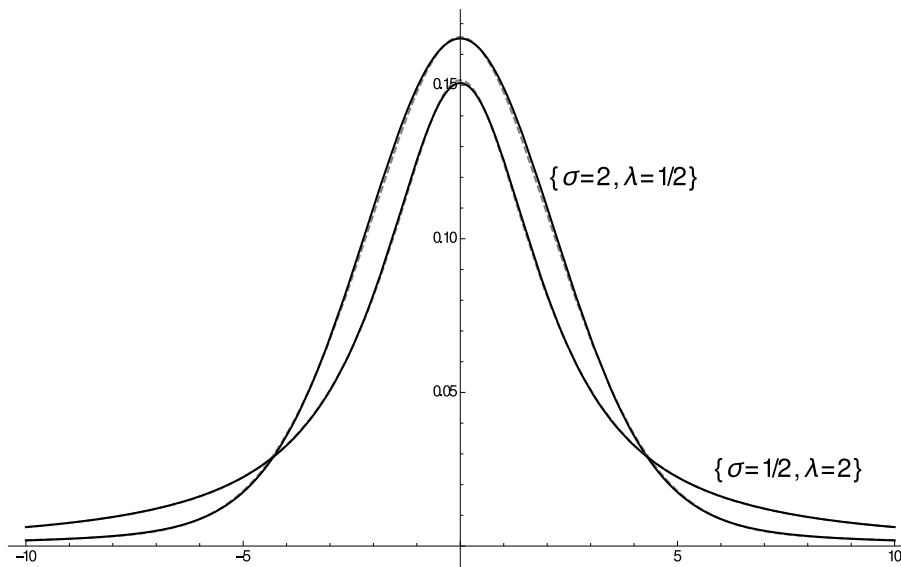


Abbildung 1.6: Vergleich von Voigt-Funktion (schwarz durchgezogen) und PseudoVoigt-Funktion (grau gestrichelt). Exakte Funktion und Näherung sind nur schwer zu unterscheiden.

1.2.9 Heaviside-Funktion, Kausalitätsprinzip

Die Heaviside-Stufenfunktion $\theta(t)$ ist definiert als

$$\theta(t) := \begin{cases} 0 & : t < 0; \\ 1 & : t > 0. \end{cases} \quad (1.104)$$

Es besteht ein enger Zusammenhang dieser Funktion mit der δ -Funktion (z.B. [5]):

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x). \quad (1.105)$$

Da die Stufenfunktion kein endliches Integral besitzt, lässt sich deren Fourier-Transformierte nicht so einfach berechnen. Als Näherung für $\theta(t)$ kann man aber verwenden:

$$\theta(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & : t < 0; \\ e^{-t/T} & : t > 0; \end{cases} \quad (1.106)$$

dies ist aber nichts anderes als eine gedämpfte Schwingung nach Gl. (1.93) mit $\nu_0 = 0$. Die Fourier-Transformierte hiervon ergibt sich deshalb – mit Blick auf Gl. (1.100) – direkt aus Gl. (1.94):

$$\begin{aligned}\theta(t) \circ \bullet \Theta(\nu) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1/T}{(1/T)^2 + (2\pi\nu)^2} - \imath \frac{2\pi\nu}{(1/T)^2 + (2\pi\nu)^2} \right) = \\ &= \pi\delta(2\pi\nu) - \frac{\imath}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\nu}{\epsilon^2 + \nu^2} = \\ &= \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{\imath}{2\pi\nu}.\end{aligned}\tag{1.107}$$

Die Stufenfunktion ist geeignet zur Beschreibung eines „Einschaltens“ (zum Zeitpunkt $t = 0$) einer Funktion $f(t)$; eine solche Funktion muss sich dann schreiben lassen als:

$$f(t) \stackrel{!}{=} f(t)\theta(t).\tag{1.108}$$

Dann gilt für die Fourier-Transformierte:

$$f(t) \circ \bullet F(\nu) \stackrel{!}{=} F(\nu) * \Theta(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu')\Theta(\nu - \nu')d\nu';\tag{1.109}$$

aus Gl. (1.107) folgt damit:

$$F(\nu) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu')\delta(2\pi(\nu - \nu'))d\nu' - \imath \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu') \frac{\nu - \nu'}{\epsilon^2 + (\nu - \nu')^2} d\nu'.\tag{1.110}$$

Der Integrand des Imaginärteils verhält sich für kleine ϵ wie $F(\nu')/(\nu - \nu')$; damit es bei $\nu = \nu'$ nicht zur Divergenz kommt, kann man bei der Integration dort eine beliebig kleine Lücke lassen, also (mit Gl. (1.53)):

$$\begin{aligned}F(\nu) &= \pi \frac{1}{2\pi} F(\nu) - \frac{\imath}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-\infty}^{\nu-\epsilon} \frac{F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu' + \int_{\nu+\epsilon}^{\infty} \frac{F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu' \right\} \\ &= \frac{1}{2} F(\nu) - \frac{\imath}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'.\end{aligned}\tag{1.111}$$

Der Ausdruck $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \{\dots\}$ ist in dieser Form gerade die Definition des Cauchy-Prinzipalwertes \mathcal{P} .

Insgesamt ergibt sich so:

$$F(\nu) = -\frac{\imath}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu',\tag{1.112}$$

woraus sofort zu sehen ist, dass Real- und Imaginärteil voneinander folgen:

$$\Re F(\nu) = +\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu';\tag{1.113}$$

$$\Im F(\nu) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re F(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu';\tag{1.114}$$

Dies entspricht den *Kramers–Kronig–Relationen* (z.B. [11]). Rein formal handelt es sich um eine *Hilbert–Transformation*, siehe Kap. 1.3.2.

Als markantes Ergebnis lässt sich also festhalten: Wenn Funktionen irgendwann (räumlich oder zeitlich) „eingeschaltet“ werden, dann bedeutet das für deren Fourier–Transformierte, dass deren Real- und Imaginärteil über eine Hilbert–Transformation auseinander hervorgehen. Der explizit zeitabhängige Vorgang eines Einschaltens stellt das Grundprinzip eines Kausalzusammenhangs zwischen Ursache und Wirkung dar. In der Literatur (z.B. [12]) wird der beschriebene Sachverhalt deshalb sogar als *mathematische Formulierung des Kausalitätsprinzips* bezeichnet (siehe auch Gl. (1.286)).

1.2.10 Kleine Fourier–Sammlung

Zur Übersicht sind hier bereits erwähnte und weitere interessante Fourier–Relationen zusammengestellt:

$$e^{-\pi x^2} \circ \bullet e^{-\pi \kappa^2}; \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt =: \operatorname{erf}(x); \quad (1.115)$$

$$x e^{-\pi x^2} \circ \bullet -i \kappa e^{-\pi \kappa^2}; \quad (1.116)$$

$$x^2 e^{-\pi x^2} \circ \bullet \left(\frac{\pi}{2} - \kappa^2\right) e^{-\pi \kappa^2}; \quad (1.117)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cosh(\pi x)} &= \operatorname{sech}(\pi x) \circ \bullet \operatorname{sech}(\pi \kappa); & \int \operatorname{sech}(\pi x) dx &= \frac{2}{\pi} \arctan(e^{\pi x}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{gd}(\pi x) + \frac{1}{2}; & & \text{(mit gd: „Gudermann’sche Funktion“)} \end{aligned} \quad (1.118)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \circ \bullet \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}; \quad \int \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \frac{2x}{\sqrt[4]{x^2}}; \quad (1.119)$$

$$\operatorname{III}(x) \circ \bullet \operatorname{III}(\kappa); \quad (1.120)$$

$$\operatorname{sech}^2(\pi x) \circ \bullet 2\kappa \cdot \operatorname{cosech}(\pi \kappa) = \frac{2\kappa}{\sinh(\pi \kappa)}; \quad (1.121)$$

$$\tanh(\pi x) \circ \bullet -i \cdot \operatorname{cosech}(\pi \kappa); \quad (1.122)$$

$$\operatorname{II}(x) \circ \bullet \operatorname{sinc}(\kappa) = \frac{\sin(\pi \kappa)}{\pi \kappa}; \quad \int \operatorname{sinc}(x) dx = \frac{\operatorname{Si}(\pi x)}{\pi}; \quad (1.123)$$

$$(\operatorname{II} * \operatorname{II})(x) = \Lambda(x) \circ \bullet \operatorname{sinc}^2(\kappa); \quad (1.124)$$

$$\operatorname{II}(x)(1 - 4x^2) \circ \bullet -\frac{8}{(2\pi \kappa)^2} (\operatorname{sinc}(\kappa) - \cos(\pi \kappa)); \quad (1.125)$$

$$\operatorname{II}\left(\frac{x}{2s}\right) \cdot \frac{\pi}{4s} \cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right) \circ \bullet \frac{\cos(2\pi s \kappa)}{1 - 16s^2 \kappa^2}; \quad (1.126)$$

$$\operatorname{II}\left(\frac{x}{2s}\right) \cdot \frac{1}{2s} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{s}\right) + 1 \right] \circ \bullet \frac{\sin(2\pi s \kappa)}{2\pi s \kappa (1 - 4s^2 \kappa^2)} = \frac{\operatorname{sinc}(2s \kappa)}{1 - (2s \kappa)^2}; \quad (1.127)$$

$$\operatorname{II}\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{1 - x^2} \circ \bullet \frac{1}{2\kappa} J_1(2\pi \kappa); \quad (1.128)$$

$$\Pi\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \circ \bullet \pi J_0(2\pi\kappa); \quad (1.129)$$

$$\operatorname{sgn}(x) \circ \bullet -\frac{i}{\pi\kappa}; \quad (1.130)$$

$$\operatorname{sgn}(x) \frac{1}{\sqrt{|x|}} \circ \bullet -i \cdot \operatorname{sgn}(\kappa) \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}; \quad (1.131)$$

$$\theta(x) \circ \bullet \frac{1}{2}\delta(\kappa) - \frac{i}{2\pi\kappa}; \quad (1.132)$$

$$e^{-|x|} \circ \bullet \frac{2}{1+(2\pi\kappa)^2}; \quad (1.133)$$

$$e^{-|x|} \frac{\sin(x)}{x} \circ \bullet \arctan \frac{1}{2\pi^2\kappa^2}; \quad (1.134)$$

$$e^{-|x|} \operatorname{sgn}(x) \circ \bullet -i \frac{4\pi\kappa}{1+(2\pi\kappa)^2}; \quad (1.135)$$

$$e^{-x}\theta(x) \circ \bullet \frac{1}{1+i2\pi\kappa} = \frac{1-i2\pi\kappa}{1+(2\pi\kappa)^2}; \quad (1.136)$$

$$(e^{-x}\theta(x)) * (e^{-x}\theta(x)) = e^{-x}x\theta(x) \circ \bullet \frac{1}{(1+i2\pi\kappa)^2}; \quad (1.137)$$

$$e^{\pm 2\pi i \eta x} \circ \bullet \delta(\kappa \mp \eta) \quad \text{bzw.} \quad 1 \circ \bullet \delta(\kappa); \quad (1.138)$$

$$\cos(2\pi\eta x) \circ \bullet \frac{1}{2}(\delta(\kappa + \eta) + \delta(\kappa - \eta)); \quad (1.139)$$

$$\sin(2\pi\eta x) \circ \bullet \frac{i}{2}(\delta(\kappa + \eta) - \delta(\kappa - \eta)); \quad (1.140)$$

1.3 Weitere Integraltransformationen

Neben der Fourier–Transformation gibt es eine Reihe weiterer Integraltransformationen, die mit ihr in Beziehung stehen und in diesem Kontext relevant sind. Eine kleine Auswahl aus diesem sehr weiten Gebiet wird – in Kurzform – nun vorgestellt. Eine herausragende Quelle dafür ist z.B. [9].

1.3.1 Laplace–Transformation

Die Laplace–Transformation ist eng verwandt mit der Fourier–Transformation: Für die Existenz des Fourier–Integrals ist notwendig, dass für die zu transformierende Funktion gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Die Anforderung an f ist geringer, wenn statt dessen $\theta(x)f(x)e^{-\gamma x}$ (mit $\gamma > 0$) transformiert wird. Die Heaviside–Funktion $\theta(x)$ (vgl. Kap. 1.2.9) verhindert, dass in negativer Richtung ein Unglück passiert, zudem entspricht dies Funktionen, die realistischerweise einen Start(Zeit-)punkt besitzen. Die Fourier–Transformierte davon lautet also:

$$\theta(x)f(x)e^{-\gamma x} \xrightarrow{\bullet \circ} \int_0^{\infty} f(x)e^{-\gamma x} e^{-2\pi i \kappa x} dx = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx =: F(s);$$

mit $s := 2\pi i \kappa + \gamma$. Für die Rücktransformation gilt dann:

$$F(2\pi i \kappa + \gamma) \xrightarrow{\bullet \circ} \theta(x)f(x)e^{-\gamma x} = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{2\pi i \kappa x} d\kappa;$$

und also:

$$\theta(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{(2\pi i \kappa + \gamma)x} d\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \infty}^{\gamma + \infty} F(s)e^{sx} ds.$$

Damit ist ein neues Transformations–Paar gefunden, die Laplace–Transformation:

$$\theta(x)f(x) \xrightarrow{\dashv \vdash} F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx; \tag{1.141}$$

$$F(s) \xrightarrow{\dashv \vdash} \theta(x)f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \infty}^{\gamma + \infty} F(s)e^{sx} ds. \tag{1.142}$$

Das Symbol $\dashv \vdash$ bezeichnet hier und im Folgenden die Laplace–Hin-, $\dashv \vdash$ die Rücktransformation.

Im Gegensatz zur Fourier–Transformation, bei der die Variable (z.B. κ oder ν) reellwertig ist und eine Bedeutung als Wellenzahl oder Frequenz besitzt, findet sich bei der Laplace–Transformation bzgl. der neuen Variablen (hier: s) keine Entsprechung, sondern es handelt sich einfach um eine komplexwertige Größe, für die das Laplace–Integral (1.141) existieren muss. Dies ist aber stets nur in einer rechten Halbebene von \mathbb{Z} der Fall, was mit folgendem einfachen Beispiel zumindest veranschaulicht werden soll, nämlich der Transformtion der Heaviside–Funktion:

$$\theta(x) \xrightarrow{\dashv \vdash} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^{\infty};$$

für die obere Grenze gilt insbesondere:

$$\frac{1}{\gamma + 2\pi i \kappa} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\gamma x} e^{-2\pi i \kappa x} \right),$$

was eine Schwingung darstellt mit der Amplitude:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma x}}{\sqrt{\gamma^2 + (2\pi\kappa)^2}} = \begin{cases} 0 & : \gamma > \gamma_0 = 0; \\ \infty & : \gamma < \gamma_0 = 0. \end{cases}$$

Es gibt jedenfalls stets ein $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, wobei die Laplace-Transformierte dazu nur existiert, wenn $\Re(s) > \gamma_0$, d.h. wenn s sich in der Halbebene rechts von γ_0 befindet. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass dies stets der Fall ist. (Genau diesen Umstand der Transformation von Halbraum zu Halbraum soll durch die Formelzeichen $\vdash \dashv$ und $\dashv \dashv$ symbolisiert werden.)

Das Integral der inversen Transformation nach Gl. (1.142) wird auch *Bromwich-Integral* (siehe z.B. [13]) genannt. Dessen Auswertung – die Rücktransformation also – stellt meist den kritischen Teil der Berechnung dar und wird eigentlich nicht direkt durchgeführt. Nach Voraussetzung muss für die Konstante γ gelten, dass $f(x)$ langsamer als $e^{\gamma x}$ divergiert. Dies ist offenbar gleichbedeutend damit, dass in der komplexen Ebene alle Pole von f links der senkrechten (d.h. parallel zur imaginären Achse) Linie $|\gamma_{-\infty}^{+\infty}$ liegen. Deshalb wird die Rücktransformation gerne mittels des Residuensatzes durchgeführt (und da u.U. mit Hilfe des Jordan'schen Lemmas (vgl. Kap. 1.4.3)). Typischerweise kommen aber an dieser Stelle stattdessen schlicht Formelwerke zum Einsatz. Wie schon die Fourier-, macht auch die Laplace-Transformation aus einer Differenzialgleichung eine algebraische Gleichung und stellt deshalb ein wichtiges Werkzeug zu deren Lösung dar.

Wichtige Eigenschaften der Laplace-Transformation (mit $f \vdash \dashv F, \{x_0, c\} > 0$):

$$\text{Linearität: } a_1 f(x) + a_2 g(x) \quad \vdash \dashv \quad a_1 F(s) + a_2 G(s); \quad (1.143)$$

$$\text{Verschiebung: } f(x - x_0) \quad \vdash \dashv \quad e^{-x_0 s} \left[F(s) + \int_{-x_0}^0 f(x) e^{-xs} dx \right]; \quad (1.144)$$

$$f(x + x_0) \quad \vdash \dashv \quad e^{+x_0 s} \left[F(s) - \int_0^{x_0} f(x) e^{-xs} dx \right]; \quad (1.145)$$

$$F(s - s_0) \quad \dashv \dashv \quad e^{+s_0 x} f(x); \quad (1.146)$$

$$\text{Ähnlichkeit: } f(cx) \quad \vdash \dashv \quad \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right); \quad (1.147)$$

$$F(cs) \quad \dashv \dashv \quad \frac{1}{c} f\left(\frac{x}{c}\right); \quad (1.148)$$

$$\text{n-te Ableitung: } f^{(n)}(x) \quad \vdash \dashv \quad s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} f \Big|_{x=+0}; \quad (1.149)$$

$$F^{(n)}(s) \quad \dashv \dashv \quad (-1)^n x^n f(x); \quad (1.150)$$

$$\text{Integration: } \int_0^x f(\xi) d\xi \quad \vdash \dashv \quad \frac{1}{s} F(s); \quad (1.151)$$

$$\int_s^\infty F(z) dz \quad \dashv \dashv \quad \frac{1}{x} f(x); \quad (1.152)$$

Eine Besonderheit betrifft die **Faltung**: Im Kontext der Laplace-Transformation ist darunter die sog. *einseitige* Faltung zu verstehen; dazu werden in der üblichen (zweiseitigen) Weise die Funktionen $(f \cdot \theta) * (g \cdot \theta)$ gefaltet, d.h.:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \theta(\xi) g(x - \xi) \theta(x - \xi) d\xi = \int_0^x f(\xi) g(x - \xi) d\xi.$$

Mit dieser einseitigen Faltung gilt dann:

$$(f * g)(x) \quad \dashv\!\!-\!\!-\dashv \quad F(s) \cdot G(s); \quad (1.153)$$

$$f(x) \cdot g(x) \quad \dashv\!\!-\!\!-\dashv \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)G(s-z)dz. \quad (1.154)$$

1.3.2 Hilbert–Transformation

Die Hilbert–Transformation ist definiert als:

$$F_{\text{Hi}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy. \quad (1.155)$$

Damit bei $y = x$ kein Unglück geschieht, ist dieses Integral zu verstehen als Cauchy–Prinzipalwert, also als $\mathcal{P}\int \dots dy$, vgl. Gl. (1.111). Formal handelt es sich dabei um eine Faltung (vgl. Kap. 1.1.2) der Funktionen $f(x)$ und $(-1/(\pi x))$; die Hilbert–Transformation kann deshalb auch geschrieben werden als:

$$F_{\text{Hi}}(x) = \left(\frac{-1}{\pi x} \right) * f(x). \quad (1.156)$$

Aufschlußreich ist die *zweimalige* Anwendung einer Hilbert–Transformation; in der Faltungsschreibweise lautet dies dann:

$$\left(\frac{-1}{\pi x} \right) * F_{\text{Hi}}(x) = \left(\frac{-1}{\pi x} \right) * \left(\frac{-1}{\pi x} \right) * f(x). \quad (1.157)$$

Über die Fourier–Transformation und dem Faltungssatz kann dieser Ausdruck leicht ausgewertet werden; mit $F_{\text{Fou}}(\kappa) \bullet\!\!-\!\!\circ f(x)$ und Gl. (1.91) ergibt sich sofort:

$$\left(\frac{-1}{\pi x} \right) * F_{\text{Hi}}(x) \circ\!\!-\!\!\bullet (i \cdot \text{sgn}(\kappa))^2 \cdot F_{\text{Fou}}(\kappa) = -F_{\text{Fou}}(\kappa) \bullet\!\!-\!\!\circ -f(x). \quad (1.158)$$

Die zweifache Anwendung der Hilbert–Transformation auf eine Funktion führt also schlicht zu ihrem Vorzeichenwechsel. Dieses Ergebnis – einfach noch einmal hingeschrieben:

$$\left(\frac{-1}{\pi x} \right) * F_{\text{Hi}}(x) = -f(x) \quad (1.159)$$

lautet aber in der Integralschreibweise:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{\text{Hi}}(y)}{y-x} dy. \quad (1.160)$$

Damit ist nun auch die Umkehrung der Hilbert–Transformation gefunden.

1.3.3 Hankel–Transformation

Eine Hankel–Transformation ν ter Ordnung lautet:

$$F_{\nu}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_{\nu}(2\pi\rho r) r dr \quad \text{mit} \quad f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} F_{\nu}(\rho) J_{\nu}(2\pi\rho r) \rho d\rho. \quad (1.161)$$

Die $J_\nu(x)$ bezeichnen dabei die Besselfunktionen (z.B. [4]). r und ρ sollen hier radiale Variablen durchaus suggerieren, denn die Hankel–Transformation wird immer dann relevant, wenn es um Fourier–Transformation von radialsymmetrischen Funktionen geht. Im wichtigen Fall einer zweidimensionalen, radialsymmetrischen Funktion $f(x, y) = f(r(x, y))$ lautet deren Fourier–Transformierte:

$$f(r) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(\kappa_x x + \kappa_y y)} dx dy \quad \underbrace{\kappa_x = \rho \cos \alpha, \kappa_y = \rho \sin \alpha}_{\downarrow =}$$

$$\int_0^{\infty} dr f(r) r \int_0^{2\pi} \exp(-2\pi i r \rho \underbrace{(\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi)}_{\cos(\alpha - \phi)}) d\phi = 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(2\pi \rho r) dr, \quad (1.162)$$

da nämlich gilt ([4]/(9.1.21)):

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} d\phi \quad \text{und} \quad J_0(-x) = J_0(x). \quad (1.163)$$

Als Ergebnis für den zweidimensionalen Fall ergibt sich also:

$$f(r) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi \rho r) r dr, \quad (1.164)$$

$$\text{mit Gl. (1.163) gilt analog : } F(\rho) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} F(\rho) J_0(2\pi \rho r) \rho d\rho. \quad (1.165)$$

Eine Winkelabhängigkeit ist verschwunden; die Fourier–Transformierte einer radialsymmetrischen Funktion ist also nicht nur ebenfalls radialsymmetrisch, sondern zeigt sich als Hankel–Transformation nullter Ordnung. Insbesondere handelt es sich nun um eine eindimensionale Transformation. Allgemein gilt bei Radialsymmetrie in n Dimensionen für die Fourier–Transformierte (z.B. [9]):

$$f(r) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\rho) = \frac{2\pi}{\rho^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^{\infty} f(r) J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi \rho r) r^{n/2} dr. \quad (1.166)$$

1.3.4 Abel–Transformation

Die Abel–Transformation ist definiert als:

$$f_A(x) = 2 \int_x^\infty \frac{f(r)rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (1.167)$$

und besitzt die Umkehrung (wenn $f(r)$ für große r hinreichend schnell verschwindet):

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{df_A(y)}{dy} \Big|_{y=x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{f'_A(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx. \quad (1.168)$$

Für die Abel–Transformation gibt es eine wichtige geometrische Interpretation; sie beschreibt nämlich die Projektion einer zweidimensionalen radialsymmetrischen Funktion $f(r)$ auf eine Dimension. Für eine solche radialsymmetrische Funktion kann die Projektion p ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die x -Achse erfolgen:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r(x, y)) dy; \quad (1.169)$$

mit $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, also $dy = r dr / \sqrt{r^2 - x^2}$, siehe Abb. 1.7, folgt:

$$p(x) = 2 \int_x^{+\infty} \frac{f(r)rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}} = F_A(x). \quad (1.170)$$

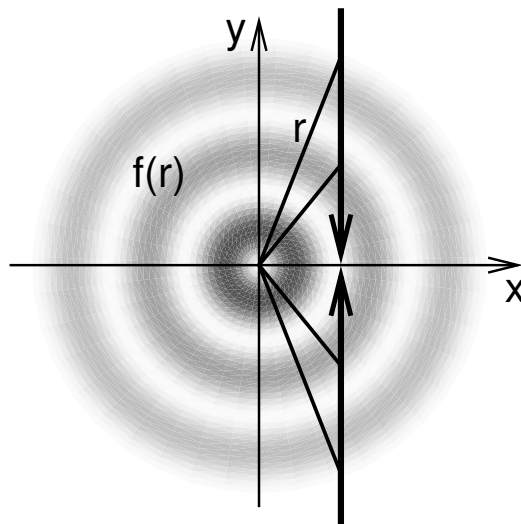


Abbildung 1.7: Zur geometrischen Interpretation der Abel–Transformation von radialsymmetrischen Funktionen: Projektion auf eine Achse.

Die **Herleitung für die Umkehrung** der Transformation (1.168) ist ein gutes Beispiel für eine typische Strategie zur Lösung von linearen Integralgleichungen, nämlich sie durch Umformung in die Form eines Faltungsprodukts zu bringen [9]. Setzt man:

$$\xi := x^2, \quad \rho := r^2, \quad k(\xi) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\xi}} & : \xi < 0; \\ 0 & : \xi \geq 0; \end{cases} \quad \tilde{f}_A(\xi) := f_A(\sqrt{\xi}), \quad \tilde{f}(\rho) := f(\sqrt{\rho}), \quad (1.171)$$

dann wird Gl. (1.167) zu:

$$\tilde{f}_A(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\rho)}{\sqrt{\rho - \xi}} d\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\rho) \cdot k(\xi - \rho) d\rho = \tilde{f} * k, \quad (1.172)$$

was somit bereits die angestrebte Faltungs-Form besitzt. Mit:

$$\tilde{f} \circ \bullet \tilde{F} \quad \text{und} \quad k \circ \bullet K(\kappa) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-2\pi i \kappa \xi}}{\sqrt{-\xi}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{-2i\kappa}} \quad (1.173)$$

folgt:

$$\tilde{f}_A \circ \bullet \tilde{F}_A = \tilde{F} \cdot K. \quad (1.174)$$

Damit ist nun die eigentliche Umkehrung möglich:

$$\tilde{F} = \tilde{F}_A \cdot \sqrt{-2i\kappa} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{-2i\kappa}} \right) \cdot (2\pi i \kappa) \tilde{F}_A. \quad (1.175)$$

Mit Hilfe der Ableitungsregel (1.9) lässt sich dies leicht rücktransformieren:

$$\tilde{F} \bullet \circ \tilde{f}(\rho) = -\frac{1}{\pi} \left[k(\xi) * \frac{d}{d\xi} \tilde{f}_A(\xi) \right] = -\frac{1}{\pi} \int_{\rho}^{\infty} \frac{\tilde{f}'_A(\xi)}{\sqrt{\xi - \rho}} d\xi. \quad (1.176)$$

Es bleibt noch die Variablentransformation (1.171) rückgängig zu machen, insbesondere ist dann:

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{f}_A(\xi) = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} f_A(x), \quad (1.177)$$

und so folgt schließlich:

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} f_A(x)}{2x\sqrt{x^2 - r^2}} 2x dx = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{f'_A(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx. \quad \blacksquare \quad (1.178)$$

1.4 Noch mehr Fourier

1.4.1 Fourier–Schicht–Theorem, Radon–Transformation

Das Fourier–Schicht–Theorem liefert einen wichtigen Zusammenhang zwischen eindimensionaler und zweidimensionaler Fourier–Transformation. Dafür benötigt man zunächst eine Drehung der Koordinaten im Ortsraum; es gilt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad (1.179)$$

analog lautet für eine Koordinatendrehung im k –Raum:

$$\begin{pmatrix} \kappa'_x \\ \kappa'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \end{pmatrix}. \quad (1.180)$$

Für die Fourier–Transformation einer zweidimensionalen Funktion $\mu(x, y)$ in gedrehten Koordinaten erhält man dann:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad M(\kappa'_x, \kappa'_y) &= \\ \iint \mu(x, y) \exp \left(-2\pi i \left[\underbrace{(\kappa'_x \cos \phi - \kappa'_y \sin \phi)}_{\kappa_x} x + \underbrace{(\kappa'_x \sin \phi + \kappa'_y \cos \phi)}_{\kappa_y} y \right] \right) dx dy &= \\ \iint \mu(x(u, v), y(u, v)) \exp \left(-2\pi i [\kappa'_x u + \kappa'_y v] \right) dudv. & \end{aligned} \quad (1.181)$$

Aus dieser sehr einfachen Rechnung lässt sich zweierlei ersehen:

1. Eine Drehung im Ortsraum bedingt eine Drehung im k –Raum (zu erkennen z.B. in Abb. 1.11) – dies ist hier sozusagen die Nebenerkenntnis. (Im Grunde gehen die Symmetriezusammenhänge noch viel weiter.)
2. Die Werte im k –Raum längs einer – um den Winkel ϕ gekippten – Geraden durch den Ursprung lauten:

$$\begin{aligned} M(\kappa'_x, 0) &= \iint \mu(u, v) e^{-2\pi i \kappa'_x u} dudv = \int \left[\underbrace{\int \mu(u, v) dv}_{p_\phi(u)} \right] e^{-2\pi i \kappa'_x u} du = \\ &= \int p_\phi(u) e^{-2\pi i \kappa'_x u} du \quad =: \quad P_\phi(\kappa'_x). \end{aligned} \quad (1.182)$$

$p_\phi(u)$ ist dabei die orthogonale Projektion der Funktion μ auf die gedrehte Achse u . Die Aussage des Fourier–Schicht–Theorems lautet also: Die Fourier–Transformierte der Projektion $p_\phi(u)$ ergibt die Werte längs einer zentralen Geraden im zugehörigen k –Raum, siehe Abb. 1.8.

Dies ermöglicht einen analytischen Zugang zur wichtigen **Radon–Transformation**: Die Radon–Transformation beschreibt den Zusammenhang zwischen einer zweidimensionalen Funktion $\mu(x, y)$ und deren eindimensionalen Projektionen nach allen Richtungen. Sie ist z.B. in der Schnittbildgebung (vor

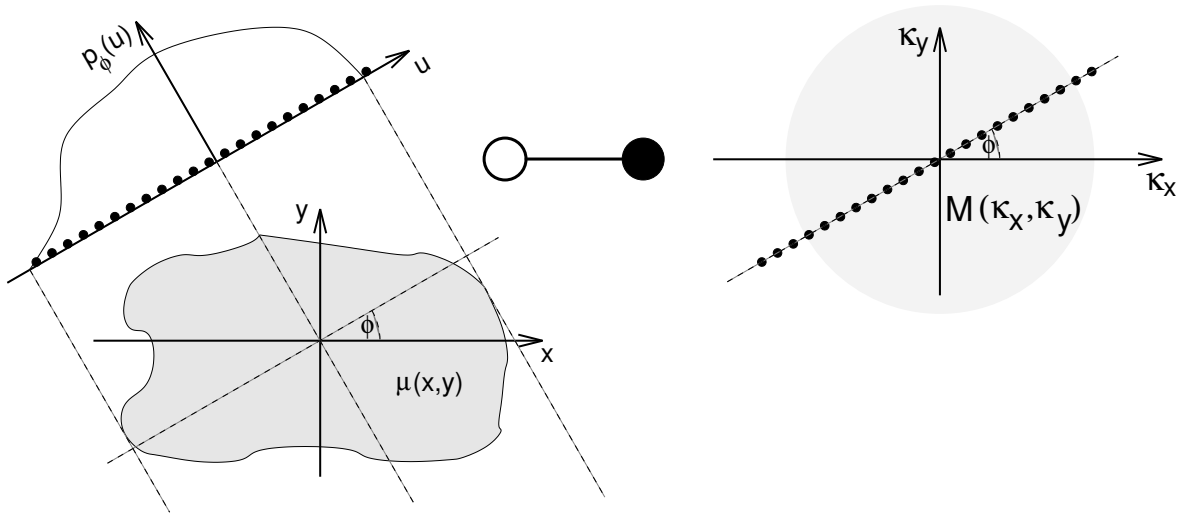


Abbildung 1.8: Zum Fourier-Schicht-Theorem. Die Fourier-Transformierte einer Projektion liefert die k -Raum-Werte längs einer zentralen Geraden im k -Raum unter dem selben Winkel.

allein in der Computertomographie) von zentraler Bedeutung. Die Abel-Transformation ist davon also der radialsymmetrische Spezialfall.

Anmerkungen:

- Bei *radialsymmetrischen* Funktionen $\mu = \mu(r)$ manifestiert sich das Fourier-Schicht-Theorem im **Abel-Fourier-Hankel-Ring** (z.B. [9]). Gemeint ist damit die Verkettung der entsprechenden Transformationen (Kap. 1.3):
 - Eine Projektion der zweidimensionalen Funktion $\mu(r)$ auf eine Dimension entspricht einer Abel-Transformation \mathcal{A} ;
 - davon wird eine eindim. Fourier-Transformation \mathcal{F} durchgeführt.
 - Dies ist äquivalent mit einer zweidim. Fourier-Transformation der radialsymmetrischen Funktion $\mu(r)$, was einer Hankel-Transformation \mathcal{H} entspricht.

Also findet man: $\mathcal{F}(\mathcal{A}\mu) = \mathcal{H}\mu$

- Das Fourier-Schicht-Theorem kann man sich noch einfacher klar machen, nämlich indem man die Fourier-Werte längs der κ_x -Achse betrachtet:

$$M(\kappa_x, 0) = \iint \mu(x, y) e^{-2\pi i \kappa_x x} dx dy = \int \underbrace{\left[\int \mu(x, y) dy \right]}_{p_{\phi=0}(x)} e^{-2\pi i \kappa_x x} dx \quad (1.183)$$

Statt dann weitere Winkel der Projektion zu berücksichtigen (wie oben), kann man sich das „Objekt“ $\mu(x, y)$ gedreht denken.

1.4.2 Hermite-Polynome als Eigenfunktionen

Ein interessanter Zusammenhang der Fourier-Transformation mit Hermite-Polynomen soll zumindest erwähnt werden; die exakte Herleitung findet sich z.B. in [14].

Die Hermite–Polynome² $H_n(x)$ besitzen die Erzeugenden–Funktion:

$$e^{tx-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x), \quad (1.184)$$

d.h. sie können als Koeffizienten dieser Taylor–Reihe erhalten werden:

$$H_n(x) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(e^{tx-t^2/2} \right) \Big|_{t=0}; \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.185)$$

Einen gewissen Einblick in die Idee, die dieser Konstruktion zugrunde liegt, bekommt man durch folgende kurze Rechnung:

$$e^{-x^2/2} H_n(x) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n e^{tx-t^2/2-x^2/2} \Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} \right)^n e^{-(x-t)^2/2} \Big|_{t=0}; \quad (1.186)$$

mit:

$$y := x - t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^n = (-1)^n \left(\frac{d}{dy} \right)^n \quad (1.187)$$

folgt:

$$e^{-x^2/2} H_n(x) = (-1)^n \left(\frac{d}{dy} \right)^n e^{-y^2/2} \Big|_{y=x} = (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}. \quad (1.188)$$

Die Multiplikation eines solchen Polynoms mit einer Gaussfunktion bewirkt also gerade eine quadratische Ergänzung im Exponenten, und damit ergibt sich dieses Produkt als höhere Ableitung der Gaussfunktion selbst. Die ersten Polynome lauten also:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1; \\ H_1(x) &= x; \\ H_2(x) &= x^2 - 1; \\ H_3(x) &= x^3 - 3x; \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3; \end{aligned}$$

Für die Polynome existiert auch ein geschlossener Ausdruck (z.B. [4](22.3.11)):

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{k! (n-2k)! 2^k} \quad (1.189)$$

Damit lässt sich ein vollständiger, orthonormierter Satz von Funktionen³ definieren (Abb. 1.9):

$$\eta_n(x) := \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{n!}} H_n(2\sqrt{\pi}x) \cdot e^{-\pi x^2}, \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(x) \eta_n(x) dx = \delta_{k,n}. \quad (1.190)$$

Bemerkenswerterweise gilt für diese Funktionen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \kappa x} \eta_n(x) dx = (-i)^n \cdot \eta_n(\kappa); \quad \text{d.h.} \quad \eta_n \circ \bullet (-i)^n \eta_n. \quad (1.191)$$

²Für die Hermite–Polynome gibt es in der Literatur unterschiedliche Definitionen.

³Diese Funktionen entsprechen *nicht* den Ableitungen der Gaussfunktion!

Bei den η_n handelt es sich also um die Eigenfunktionen⁴ der Fourier–Transformation, und dazu gibt es nur die vier Eigenwerte $\pm i, \pm 1$.

Jede Funktion $f(x)$ (die Fourier–transformierbar ist) lässt sich also darstellen als:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_n(x), \quad \left(\text{mit } a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \eta_n(x) dx \right) \quad (1.192)$$

und dann lautet die Fourier–Transformation schlicht:

$$f(x) \circ \bullet F(\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-i)^n \eta_n(x). \quad (1.193)$$

Insbesondere müssen die quasi zufällig gefundenen Eigenfunktionen (1.118), (1.119), (1.120) oder Konstrukte der Art $f(x) = g(x) + G(x)$ (mit g gerade und $g \circ \bullet G$) linearkombinierbar sein aus Eigenfunktionen zum Eigenwert $+1$, sich also schreiben lassen als:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} \eta_{4n}(x). \quad (1.194)$$

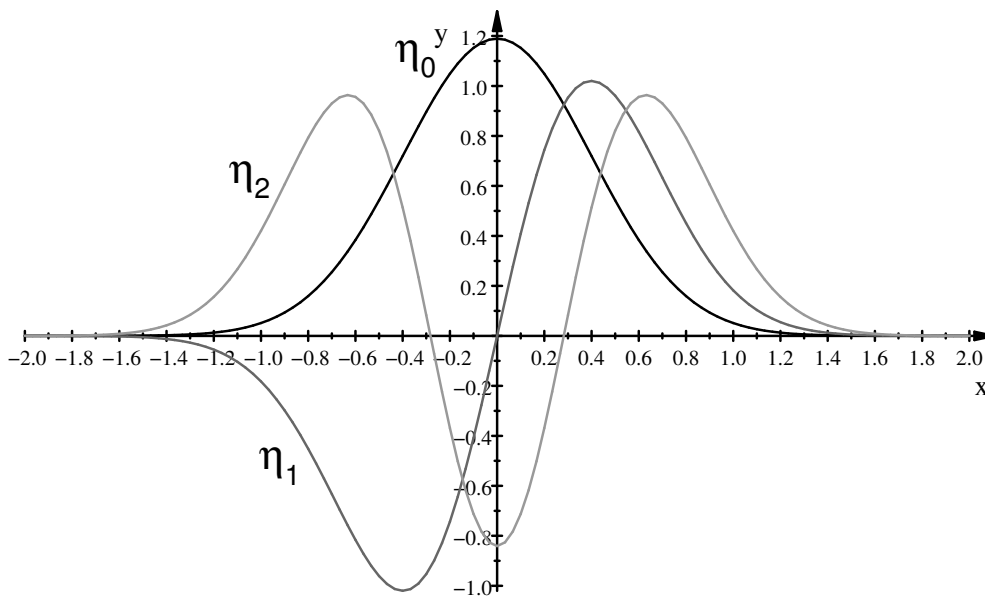


Abbildung 1.9: Eigenfunktionen der Fourier–Transformation, konstruiert aus den ersten Hermite–Polynomen.

⁴In der Physik sind diese Funktionen wohlbekannt: Es sind die quantenmechanischen Zustandsfunktionen des *harmonischen Oszillators*. Hier lautet die Schrödingergleichung als Differenzialgleichung in der Ortsdarstellung formal identisch wie in der Impulsdarstellung. Deshalb müssen die Lösungsfunktionen $\psi(x)$ bzw. $\psi(p)$ ebenfalls formal identisch sein. Da nun grundsätzlich in der Quantenmechanik Orts- und Impulsdarstellung durch eine Fourier–Transformation auseinander hervorgehen, folgt zwangsläufig, dass es sich dabei nur um obige Funktionen handeln kann.

1.4.3 Lemma von Jordan

Das Lemma von Jordan bietet eine interessante Möglichkeit, Fourier-Integrale zu berechnen (z.B. [15]): Falls $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, können Integrale vom Typ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx} dx$ vorteilhaft als Kontourintegrale behandelt werden. Der Integrationsweg wird mittels eines großen Halbkreises geschlossen, der aber keinen Betrag zum Integral leistet („harmloser Hilfsweg“). Wenn $k > 0$ liegt der Halbkreis in der oberen Halbebene von \mathbb{C} , wenn $k < 0$ in der unteren. Der Integralwert ergibt sich nach dem Residuensatz dann zu:

$$I = \pm 2\pi i \sum_{\text{eingeschl.}} \text{Res} [f(z)e^{ikz}]. \quad (1.195)$$

Beweis: (für $k > 0$, Halbkreis $z = Re^{i\varphi}$) \implies Integral über oberen Halbkreis:

$$\begin{aligned} I(R) &= \int_0^\pi f(Re^{i\varphi})e^{ikRe^{i\varphi}} \cdot Rie^{i\varphi} d\varphi \leq R \int_0^\pi |f(Re^{i\varphi})|e^{-kR \sin \varphi} d\varphi \\ &\leq R \cdot \max |f(Re^{i\varphi})| \cdot 2 \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \varphi} d\varphi \leq R \cdot \max |f(Re^{i\varphi})| \cdot 2 \int_0^{\pi/2} e^{-kR\varphi \cdot 2/\pi} d\varphi \\ &= \max |f(Re^{i\varphi})| \cdot \frac{\pi}{k} (1 - e^{-kR}) \stackrel{R \rightarrow \infty}{=} \max |f(Re^{i\varphi})| \cdot \frac{\pi}{k} = 0, \end{aligned}$$

da ja nach Voraussetzung $\lim_{(|z|=R) \rightarrow \infty} f = 0$ gilt. Der Beweis für $k < 0$ geht analog. ■

Beispiel: Berechnung des Integrals $\int \frac{e^{ikx}}{1+x^{2n}} dx$.

Die Pole sind alle von erster Ordnung und liegen bei:

$$z_m = e^{i\pi \frac{2m+1}{2n}}, \quad \text{mit } m = \begin{cases} 0 \cdots n-1 & : \text{ obere Halbebene,} \\ n \cdots 2n-1 & : \text{ untere Halbebene.} \end{cases}$$

Für die Residuen findet man:

$$\text{Res}_{z_m} \frac{e^{ikz}}{1+z^{2n}} = \frac{e^{ikz}}{2n \cdot z^{2n-1}} \Big|_{z=z_m} = -\frac{1}{2n} \exp \left(ike^{i\pi(2m+1)/(2n)} + i\pi(2m+1)/(2n) \right).$$

Insgesamt ergibt sich so:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^{2n}} dx = \begin{cases} -\frac{i\pi}{n} \sum_{\substack{m=0 \\ 2n-1}}^{n-1} \exp \left(ike^{i\pi(2m+1)/(2n)} + i\pi(2m+1)/(2n) \right) & : k > 0; \\ +\frac{i\pi}{n} \sum_{m=n} \exp \left(ike^{i\pi(2m+1)/(2n)} + i\pi(2m+1)/(2n) \right) & : k < 0. \end{cases}$$

Konkret erhält man dann z.B.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^4} dx = \pi e^{-\frac{|k|}{\sqrt{2}}} \cos \left(\frac{|k|}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \right).$$

1.4.4 Gibbs–Wilbraham–Phänomen

Das Gibbs–Wilbraham–Phänomen ist eine – je nach Sichtweise – interessante oder störende Erscheinung in Zusammenhang mit der Fourier–Transformation. Die rein mathematische Gleichung $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\kappa) \exp(2\pi i \kappa x) d\kappa$ gilt exakt – auch wenn $f(x)$ Unstetigkeitsstellen besitzt. Spätestens aber bei einer numerischen oder technischen Anwendung wird man typischerweise die hohen Frequenzen nur bis zu einer Grenze κ_0 berücksichtigen können, und man erhält eine Approximation in der Form $f(x) \approx \int_{-\kappa_0}^{+\kappa_0} F(\kappa) \exp(2\pi i \kappa x) d\kappa$. Das Fehlen der hohen Frequenzen macht sich speziell an Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ bemerkbar. Man kann zwar mit Recht annehmen, dass die Approximation mit $\kappa_0 \rightarrow \infty$ insgesamt immer besser wird, bemerkenswert ist aber, wie sich die Sache an den Unstetigkeiten darstellt:

Das Abschneiden der hohen Frequenzen ist äquivalent mit der Multiplikation von $F(\kappa)$ mit einer Rechtecksfunktion, was bedeutet, dass die zu rekonstruierende Funktion $f(x)$ mit einer sinc–Funktion gefaltet wird, also:

$$F(\kappa) \cdot \Pi\left(\frac{\kappa}{2\kappa_0}\right) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(x) * (2\kappa_0 \cdot \text{sinc}(2\kappa_0 x)). \quad (1.196)$$

Die unmittelbare Umgebung einer Unstetigkeit lässt sich dann beschreiben als:

$$\begin{aligned} \theta(x) * (2\kappa_0 \cdot \text{sinc}(2\kappa_0 x)) &= 2\kappa_0 \int_0^{\infty} \text{sinc}(2\kappa_0(x - \xi)) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{2\kappa_0 x} \text{sinc}(z) dz = \frac{1}{2} + \int_0^{2\kappa_0 x} \text{sinc}(z) dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(2\pi \kappa_0 x). \end{aligned} \quad (1.197)$$

(Die Funktion Si bezeichnet den sog. Integralsinus, vgl. Gl. (1.57) und Abb. 1.2.) Mit diesem Ergebnis wird deutlich, was an der Unstetigkeitsstelle passiert, wenn die Abschneidefrequenz κ_0 immer größer wird: Die Funktion wird nur horizontal gestaucht. Die Approximation zeigt also stets Überschwinger, die mit zunehmendem κ_0 zwar immer schmaler werden, ihre Höhe aber nicht ändern (siehe Abb. 1.10). Die Höhe des Überschwingens ist leicht zu ermitteln, indem man die ungestauchte Funktion betrachtet. Für deren Maximalwert findet man:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx \approx 1.0895. \quad (1.198)$$

Als markantes Ergebnis lässt sich also festhalten: Die Gibbs'schen Überschwinger bei Unstetigkeiten verschwinden praktisch nie, sie werden nur schmaler und rücken näher an die Unstetigkeit heran. Ihre Überhöhung beträgt rund 9% der Sprunghöhe an der Unstetigkeit (jeweils nach oben und nach unten).

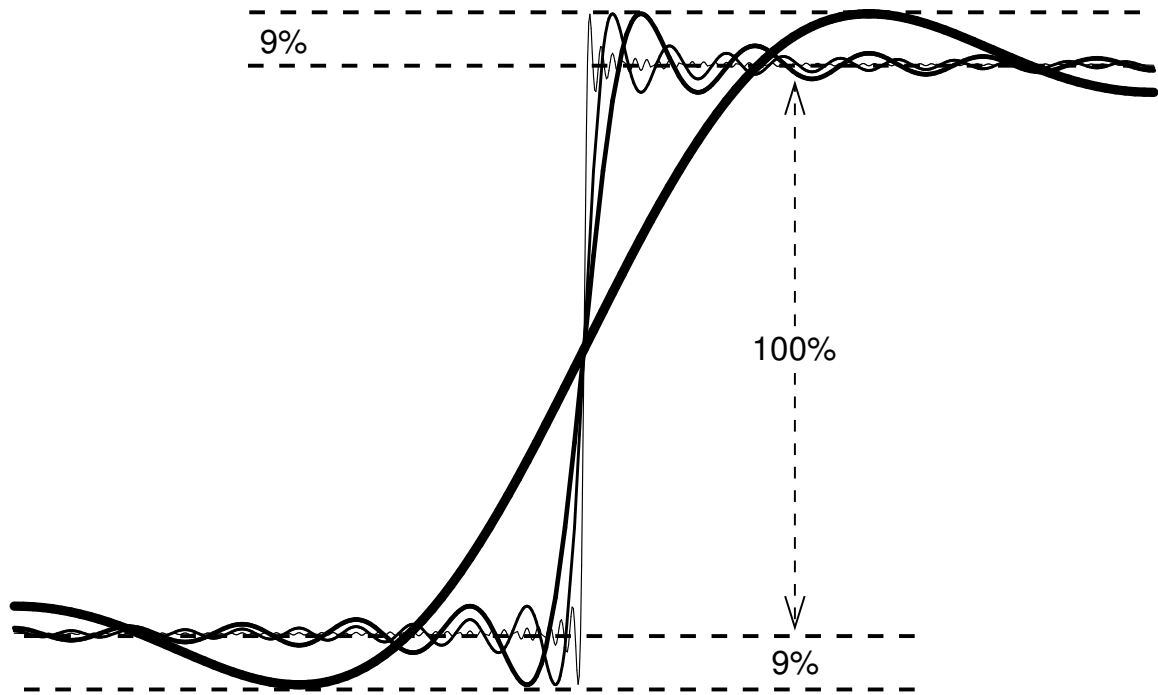
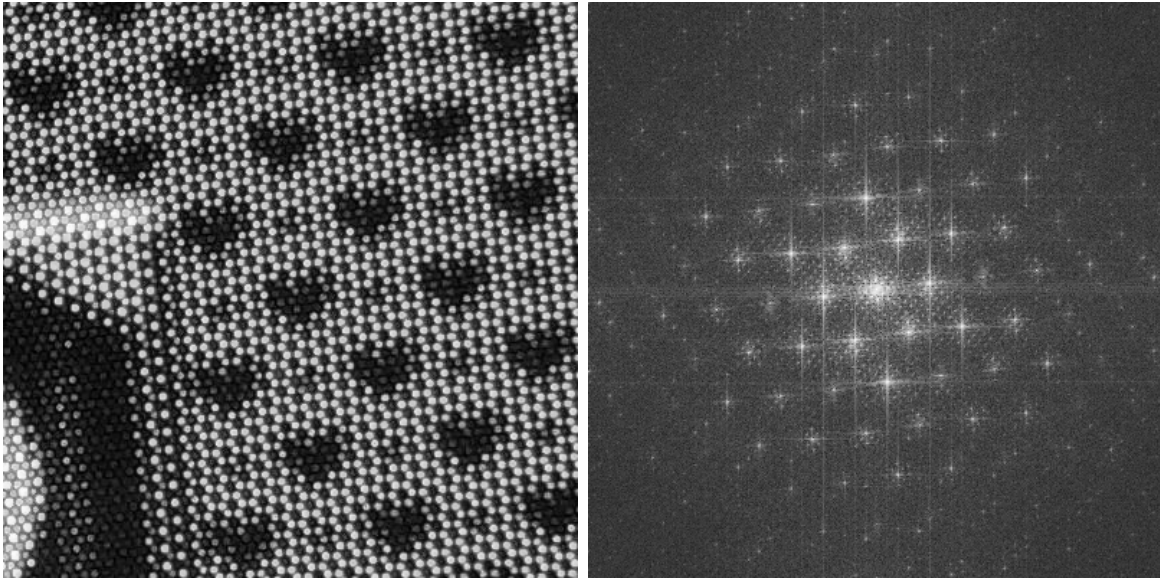


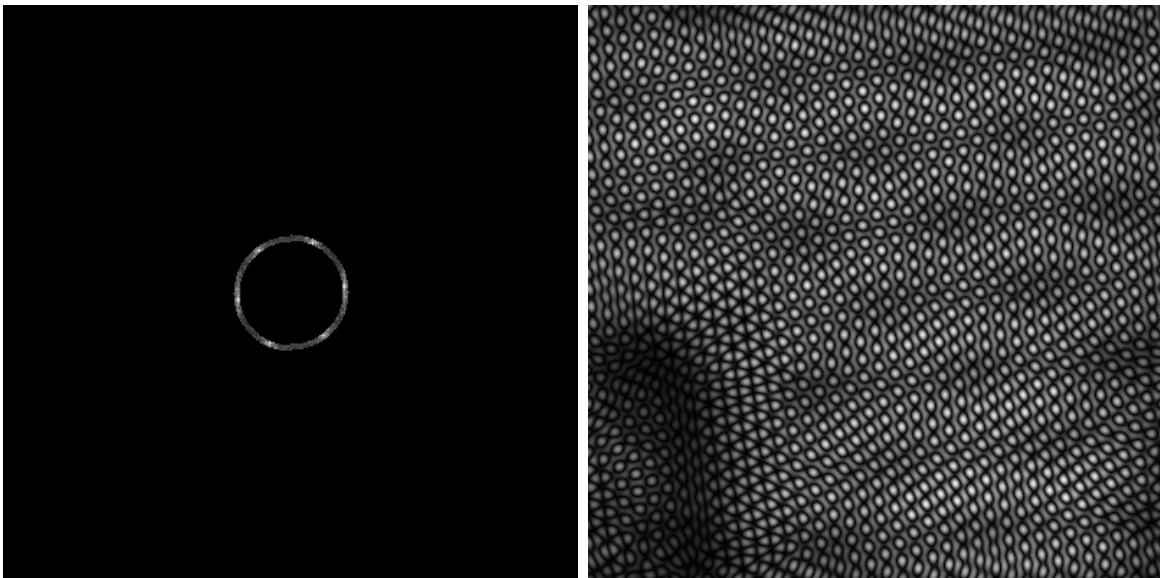
Abbildung 1.10: Gibbs–Wilbraham–Phänomen: An Kanten (d.h. Unstetigkeiten) ergeben sich stets Überschwinger, deren Höhe sich niemals ändert.



(a) Bild.

(b) Fourier-Transformierte.

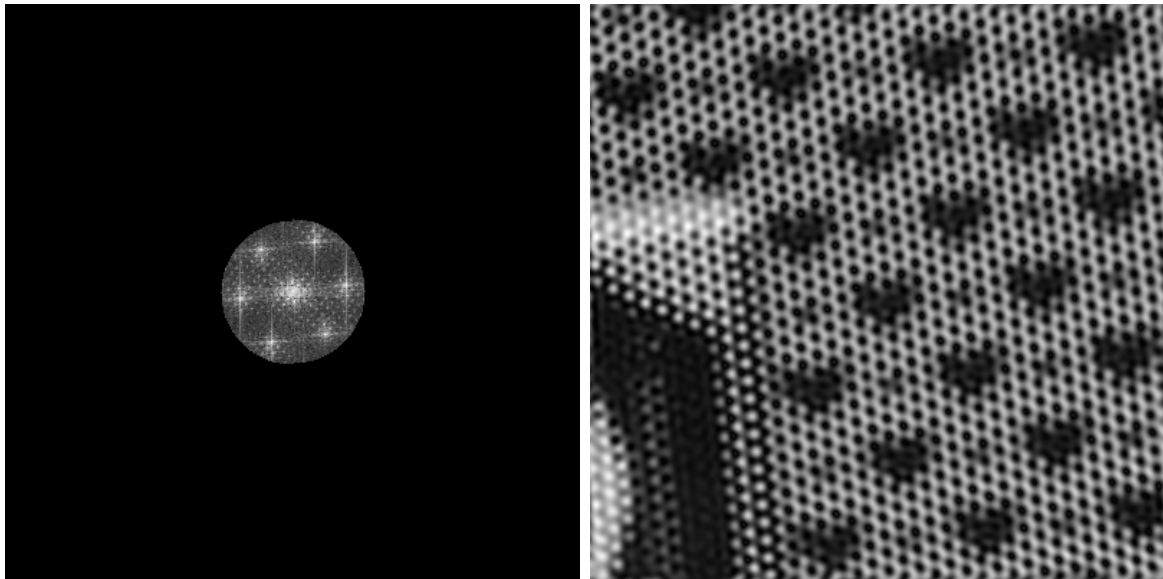
Abbildung 1.11: Ausschnitt einer digitalen Aufnahme eines PC-Bildschirms und deren Fourier-Transformierte. Die Periodizitäten, die im Bild enthalten sind, zeichnen sich im Fourier-Raum in Form diskreter Peaks deutlich ab und bilden dort selbst wieder eine periodische Struktur. Man spricht dann von einem „reziproken Gitter“, im Wesentlichen ist dies eine Konsequenz von Gl. (1.83). (Gezeigt sind nur die Betragsbilder.)



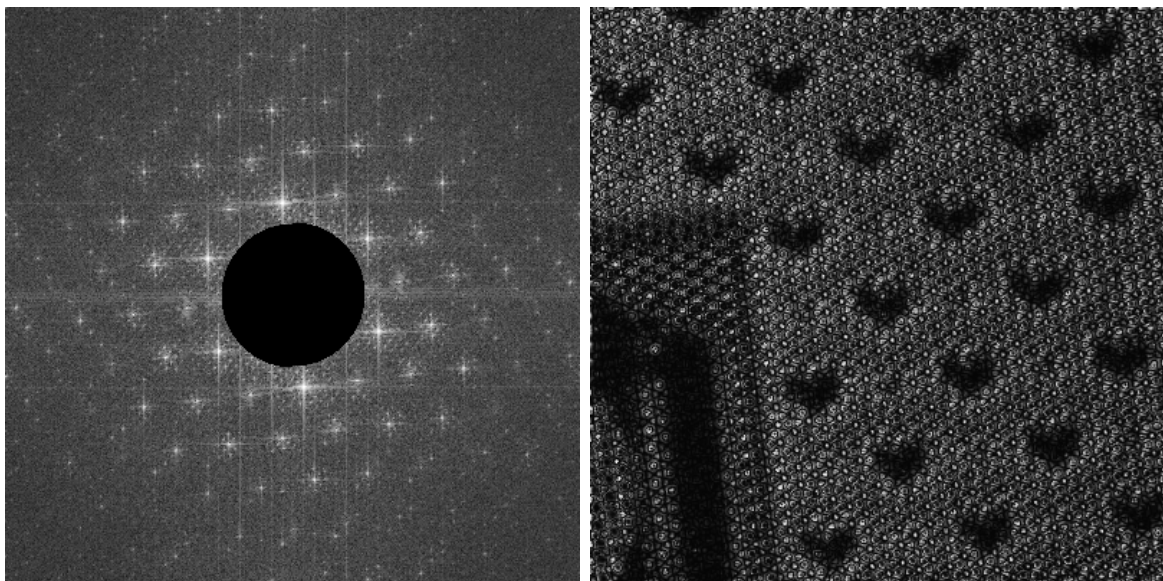
(a) Berücksichtigung eines schmalen Frequenzbereiches.

(b) Resultierendes Bild, bestehend aus Wellen sehr ähnlicher Wellenlänge.

Abbildung 1.12: Rücktransformation eines schmalbandigen Ausschnitts des Frequenzbereiches. (Gezeigt sind nur die Betragsbilder.)

(a) Nur zentraler Anteil des k -Raums.

(b) Resultierendes Bild.

(c) Nur peripherer Anteil des k -Raums.

(d) Resultierendes Bild.

Abbildung 1.13: Ausschneiden des hoch- bzw. des niederfrequenten Anteils im k -Raum und anschließende Rücktransformation: Ohne die äußeren Bereiche des k -Raums fehlen im Bild die hohen Ortsfrequenzen; die Auflösung geht somit verloren, aber der Kontrast ist erhalten. Wird umgekehrt nur der äußere Bereich berücksichtigt, geht der Kontrast weitgehend verloren, aber die Auflösung bleibt erhalten. (Gezeigt sind nur die Betragsbilder.)

1.5 Statistik – Grundlagen

Im Sinne einer gewissen thematischen Abgeschlossenheit müssen auch die Grundlagen der Statistik erwähnt werden. Generell eine ausgezeichnete Quelle zu dieser Thematik ist z.B. [16].

1.5.1 Grundlagen der Grundlagen

Fakultät und Gamma-Funktion

Die Fakultät einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (1.199)$$

Im Kontext der Statistik ist die Fakultät von zentraler Bedeutung, da sie die Anzahl der möglichen Permutationen von n unterscheidbaren Objekten angibt. Eine u.U. nützliche Abschätzung lautet (z.B. [6]):

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}. \quad (1.200)$$

Für die Fakultät gibt es einen wichtigen analytischen Ausdruck (der auch für nicht-ganzzahlige Argumente funktioniert), das **Euler-Integral**:

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt. \quad (1.201)$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion; den Anfang macht:

$$0! = 1 = \int_0^{\infty} e^{-t} dt; \quad (1.202)$$

den Induktionsschritt erhält man dann schlicht durch partielle Integration:

$$f_n := \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = -e^{-t} t^n \Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} n t^{n-1} dt = -0 + n \cdot f_{n-1}. \quad \blacksquare \quad (1.203)$$

Denn dies ist genau die rekursive Eigenschaft der Fakultät: $n! = n \cdot (n-1)!$

Für nicht-ganzzahlige Argumente ist eigentlich die sog. Gamma-Funktion definiert:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (1.204)$$

es gilt also – sozusagen als Merksregel – der Zusammenhang: $n\Gamma(n) = n!$

In diesem Kontext tritt auch gerne die **Doppelfakultät** auf, bei der nur jeweils jeder zweite Term im Produkt berücksichtigt wird. Es gilt:

$$\begin{aligned} n \text{ ungerade: } n!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)! 2^{(n+1)/2}} = 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \\ n \text{ gerade: } n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n = \left(\frac{n}{2}\right)! 2^{n/2} = 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right); \end{aligned} \quad (1.205)$$

Für beliebige Argumente gibt es aber auch einen geschlossenen Ausdruck (z.B. [17]):

$$z!! = 2^{z/2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{(1-\cos[\pi z])/4} \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right) \quad (1.206)$$

damit gilt also speziell: $(-1)!! = 0!! = 1$.

Randnotizen zum Euler-Integral (1.201)

- Substitution: $e^{-t} =: y \implies n! = \int_0^1 (-\ln t)^n dt$;
- Substitution: $t^{n+1} =: y \implies n! = \int_0^\infty e^{-t^{1/n}} dt$; damit erhält man z.B. sofort:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \quad \int_0^\infty e^{-\sqrt{t}} dt = 2; \quad \int_0^\infty e^{-\sqrt[3]{t}} dt = 6; \quad \text{etc.}\dots$$

- **Borel-Summation:** Bei Summen $\sum_n a_n$ mit „Konvergenzproblemen“ läßt sich schreiben:

$$\sum_n a_n = \sum_n a_n \cdot 1 = \sum_n a_n \cdot \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \int_0^\infty e^{-t} \left[\sum_n \frac{a_n t^n}{n!} \right] dt;$$

die Summe unter dem Integral kann typischerweise viel einfacher berechnet werden. Damit lassen sich sogar nicht-konvergierenden Summen endliche Werte *zuordnen* („Regularisierung“), z.B.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \stackrel{R}{=} \frac{1}{2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \stackrel{R}{=} \frac{1}{4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n) \stackrel{R}{=} \frac{\sin 1}{2(1 - \cos 1)};$$

Stirling-Approximation, Stirling-Reihe

Bei großen Werten von n sind oft Näherungsausdrücke für $n!$ notwendig. Ausgangspunkt dafür ist Gl. (1.201):

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \int_0^\infty e^{-t+n \ln t} dt. \quad (1.207)$$

Der Ausdruck im Exponenten läßt sich durch eine Taylor-Entwicklung um $t = n$ nähern:

$$-t + n \ln t \approx n \ln n - n - \frac{(t-n)^2}{2n}. \quad (1.208)$$

Man erhält so die *Stirling-Approximation*:

$$n! \approx e^{n \ln n - n} \int_0^\infty e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}} dt \approx e^{n \ln n - n} \sqrt{2\pi n}. \quad (1.209)$$

Die letzte Näherung beruht darauf, dass n nach Voraussetzung groß und damit also die Gaussfunktion quasi vollständig nach rechts in den Integrationsbereich verschoben ist.

Gl. (1.209) besagt, dass die Ausdrücke asymptotisch sind, d.h. dass gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}} = 1.$$

Dies kann nach $(1/x)$ Taylor-entwickelt werden; es ergibt sich die *Stirling-Reihe*:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}} = 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \frac{163879}{209018880x^5} + O\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

Als Ergebnis findet man so (vgl. z.B. [6][4]):

$$n! = e^{n \ln n - n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right). \quad (1.210)$$

Kenngrößen einer Verteilung

Darunter versteht man Größen, die bestimmte Aspekte einer diskreten Verteilung f_x , bzw. einer kontinuierlichen Verteilung $f(x)$ charakterisieren. Maßgeblich dafür ist, dass die Verteilungen *bekannt* sind – im Gegensatz zur Betrachtung von Stichproben bei noch zu bestimmenden Verteilungen (Kap. 1.5.8). Die wichtigsten sind:

k tes Moment einer Verteilung bezeichnet den Erwartungswert der k ten Potenz:

$$\langle x^k \rangle := \sum_x x^k f_x, \quad \text{bzw.} \quad \langle x^k \rangle := \int x^k f(x) dx. \quad (1.211)$$

Mit Kenntnis der Momente lassen sich alle weiteren und insbesondere die folgenden Kenngrößen berechnen.

Mittelwert einer Verteilung ist definiert als $\mu := \langle x \rangle$ und entspricht dem Schwerpunkt einer Verteilung – völlig analog zur Mechanik. Es gelten die Rechenregeln:

$$\langle ax + b \rangle = a \langle x \rangle + b; \quad (1.212)$$

$$\langle x + y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle. \quad (1.213)$$

Varianz einer Verteilung beschreibt die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert:

$$\text{var}(x) = \sigma^2 := \langle (x - \mu)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (1.214)$$

Die Größe σ wird als *Standardabweichung* bezeichnet und stellt ein Maß für die Breite der Verteilung dar. Das mechanische Analogon zur Varianz ist das Trägheitsmoment. Durch direktes Nachrechnen lässt sich zeigen:

$$\text{var}(ax + b) = a^2 \text{var}(x) = a^2 \sigma^2; \quad (1.215)$$

$$\text{var}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y) + 2 \cdot \text{cov}(x, y); \quad (1.216)$$

wobei $\text{cov}(x, y) := \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$ als *Kovarianz* bezeichnet wird. Sind die Verteilungen x und y unabhängig, dann gilt: $\text{cov}(x, y) = 0$, und folglich:

$$\text{var}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y). \quad (1.217)$$

Schiefe einer Verteilung wird als Maß für deren Asymmetrie verwendet:

$$\gamma := \frac{1}{\sigma^3} \langle (x - \mu)^3 \rangle. \quad (1.218)$$

Die Schiefe kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Es ist unmittelbar einzusehen, dass eine symmetrische Verteilung den Wert $\gamma = 0$ besitzt; umgekehrt kann aber aus $\gamma = 0$ nicht zwingend auf Symmetrie der Verteilung geschlossen werden.

1.5.2 Momenterzeugende und charakteristische Funktion, Additionssatz

Sei wieder f_x eine diskrete, bzw. $f(x)$ eine kontinuierliche Verteilung. Die momenterzeugende Funktion zu dieser Verteilung ist definiert als

$$G(t) := \sum_x e^{tx} f_x, \quad \text{bzw.} \quad G(t) := \int e^{tx} f(x) dx \quad (1.219)$$

und besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft:

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} G(t) \right|_{t=0} = \langle x^k \rangle. \quad (1.220)$$

Gelingt es also, für eine bestimmte Verteilung einen geschlossenen Ausdruck für $G(t)$ zu finden, dann ist damit das Problem der Berechnung der Momente $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \dots$ und weiter der Berechnung des Mittelwerts, der Standardabweichung, etc. vollständig gelöst.

Bei Konvergenzproblemen in den Ausdrücken (1.219) kann stattdessen die sog. **charakteristische Funktion** verwendet werden:

$$G(t) := \sum_x e^{itx} f_x, \quad \text{bzw.} \quad G(t) := \int e^{itx} f(x) dx. \quad (1.221)$$

Ganz ähnlich gilt dann:

$$\langle x^k \rangle = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k}{dt^k} G(t) \right|_{t=0}. \quad (1.222)$$

Für solche „Fourier-artigen“ Ausdrücke, wie sie in Gln. (1.219) und (1.221) vorkommen, gilt aber stets der Faltungssatz (vgl. Gl. (1.31))! Aus dieser unscheinbaren Tatsache resultieren nun neue Einsichten: Werden Wahrscheinlichkeitsverteilungen miteinander gefaltet, dann gilt der Faltungssatz eben auch für die zugehörigen charakteristischen Funktionen! Die charakteristische Funktion des Faltungsprodukts ist dann schlicht das Produkt der einzelnen charakteristischen Funktionen. Insbesondere lassen sich dann sofort die resultierenden Kenngrößen berechnen. Es sei also eine Verteilung P_1 mit der charakteristischen Funktion $G_1(t)$ und analog P_2 mit $G_2(t)$ gegeben. Die Verteilung $P := P_1 * P_2$ besitzt damit die charakteristische Funktion $G = G_1 \cdot G_2$. Dann gilt für das erste Moment:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \left. \frac{d}{dt} (G_1 G_2) \right|_{t=0} = \left. (G_1' G_2 + G_1 G_2') \right|_{t=0} = \left. (G_1' + G_2') \right|_{t=0} = \\ &= \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle; \end{aligned}$$

und für das zweite Moment:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \left. (G_1'' G_2 + 2G_1' G_2' + G_1 G_2'') \right|_{t=0} = \left. (G_1'' + 2G_1' G_2' + G_2'') \right|_{t=0} = \\ &= \langle x_1^2 \rangle + 2 \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt dann für die Kenngrößen:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2; \quad (1.223)$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \quad (1.224)$$

Quasi kostenlos bekommt man so die grundsätzliche Aussage, dass sich unter Faltung die Mittelwerte und die Varianzen addieren (vgl. Gl. (1.213)(1.217)).

Die Faltung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist nicht etwa exotisch, sondern tritt immer dann auf, wenn nach der Wahrscheinlichkeit einer *Summe* von Zufallsgrößen gefragt wird:

Seien zwei unabhängige Zufallsgrößen x_1 und x_2 mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 gegeben. Eine Konfiguration, in der der Wert $x = x_1 + x_2$ als Summe auftritt, lautet: $x_1 = (x - \xi)$ und $x_2 = \xi$. Für die Wahrscheinlichkeit eines Wertes x ist dann über diese Konfigurationen zu summieren:

$$p_{12}(x) = \int p_1(x - \xi)p_2(\xi)d\xi; \quad (1.225)$$

dies ist aber genau die Faltung der Einzelverteilungen. Man kann die Rechnung in dieser Weise problemlos weitertreiben: Ist nach einer festen Summe aus drei Zufallsgrößen gefragt, dann ergeben sich zusätzlich zu den obigen die Konfigurationen: $y = x_1 + x_2 + x_3 = x + x_3 \Rightarrow x = y - \zeta, x_3 = \zeta$; die Wahrscheinlichkeit für einen Summenwert y lautet somit:

$$p_{123}(y) = \int p_{12}(y - \zeta)p_3(\zeta)d\zeta = p_{12} * p_3 = p_1 * p_2 * p_3. \quad (1.226)$$

Es ist offensichtlich, dass man nach diesem Muster weiterrechnen kann, und also dieser Zusammenhang für die Faltung einer beliebigen Zahl von Verteilungen gilt. Dass dieses Vielfach-Faltungsprodukt als neue Verteilung auch wieder normiert ist, stellt Gl. (1.36) sicher.

1.5.3 Binomialverteilung

Es seien bei einem Zufallsexperiment nur zwei Ergebnisse möglich, nämlich die Ergebnisse A mit der Wahrscheinlichkeit p und B mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Wird dieses Experiment N mal durchgeführt und sind diese Durchführungen jeweils voneinander unabhängig, dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten „Ereignispfad“ AABABABBA... aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten $p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p \cdot \dots$. Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl des Auftretens von A und B wird dann durch die kombinatorische Summe der entsprechenden Produkte gebildet:

$$B_N(n) = \frac{N!}{(n - N)!n!} \cdot p^n q^{N-n} = \binom{N}{n} \cdot p^n q^{N-n}. \quad (1.227)$$

Dieser Ausdruck gibt die Wahrscheinlichkeit an, von N identischen Zufallsexperimenten genau n -mal A und $(N - n)$ -mal B (in beliebiger Reihenfolge!) zu erhalten.

Die momenterzeugende Funktion (vgl. Gl. (1.219)) lautet:

$$G(t) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (e^t p)^n q^{N-n} = (e^t p + q)^N. \quad (1.228)$$

Daraus folgen sofort die Momente:

$$\langle n \rangle = Np, \quad \langle n^2 \rangle = N^2 p^2 + Npq. \quad (1.229)$$

Damit ergibt sich für die Binomialverteilung:

$$\langle n \rangle = \mu = Np, \quad \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \sigma^2 = Npq. \quad (1.230)$$

1.5.4 Poissonverteilung

Die Poissonverteilung beschreibt den Grenzfalle der Binomialverteilung, für den gilt:

- Wahrscheinlichkeit p sehr klein,
- Wiederholungszahl N sehr groß,
- der Mittelwert $\mu = Np$ „endlich“.

Typisches Beispiel ist eine persönliche Unfallstatistik: Die Wahrscheinlichkeit für einen Unfall an einem bestimmten Tag ist zwar klein (hoffentlich!), aber dafür versucht man es jeden Tag aufs Neue!

Ausgehend von der Binomialverteilung ergibt sich für diesen Grenzfalle:

$$\begin{aligned} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} &= \frac{\mu^n}{n!} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N \cdot \frac{N!}{(N-n)! N^n} \left(\frac{N}{N-\mu}\right)^n \\ &\stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\mu^n}{n!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{N!}{(N-n)! (N-\mu)^n}; \end{aligned} \quad (1.231)$$

man findet, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N-n)!} \frac{1}{(N-\mu)^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N-\mu} \cdot \frac{N-1}{N-\mu} \cdot \dots \cdot \frac{N-n+1}{N-\mu} = 1. \quad (1.232)$$

Die Poissonverteilung lautet damit:

$$P(\mu, n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}. \quad \blacksquare \quad (1.233)$$

Auch hier lässt sich für die momenterzeugende Funktion (vgl. Gl. (1.219)) sofort eine geschlossene Form angeben:

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} = e^{\mu(e^t-1)}. \quad (1.234)$$

Dies liefert die Momente:

$$\langle n \rangle = \mu, \quad \langle n^2 \rangle = \mu(\mu + 1), \quad (1.235)$$

also folgt für die Poissonverteilung:

$$\langle n \rangle = \mu, \quad \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \sigma^2 = \mu. \quad (1.236)$$

1.5.5 Gaussverteilung

Die Gaussverteilung oder *Normalverteilung* ist in der Statistik von zentraler Bedeutung. Ausgangspunkt ist auch hier wieder die Binomialverteilung. Die Ausdrücke für die Fakultäten im Binomialkoeffizienten werden in einem ersten Schritt mit der Stirling-Formel (vgl. Gl. (1.209)) genähert:

$$f(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x q^{N-x} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \left(\frac{Nq}{N-x}\right)^{N-x+1/2} \left(\frac{Np}{x}\right)^{x+1/2}. \quad (1.237)$$

Dem liegt natürlich die Annahme zugrunde, dass die Zahlen $x, N, N - x$ „groß“ sind. Nun wird für x eine neue, normalisierte Variable eingeführt:

$$z := \frac{x - Np}{\sqrt{Npq}} \implies x = \sqrt{Npq}z + Np; \quad (1.238)$$

die Verteilung kann dann geschrieben werden als:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-h}, \quad (1.239)$$

wobei der Exponent h lautet:

$$h := \left(Nq + \frac{1}{2} - z\sqrt{Npq} \right) \cdot \ln \left(1 - z\sqrt{\frac{p}{Nq}} \right) + \left(Np + \frac{1}{2} + z\sqrt{Npq} \right) \cdot \ln \left(1 + z\sqrt{\frac{q}{Np}} \right). \quad (1.240)$$

Für hinreichend große N bleibt z beschränkt, damit gilt:

$$\left| z\sqrt{\frac{p}{Nq}} \right| \ll 1 \quad \text{und} \quad \left| z\sqrt{\frac{q}{Np}} \right| \ll 1; \quad (1.241)$$

die Logarithmus-Terme können somit Taylor-entwickelt werden in der Form:

$$\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}, \quad \text{also:} \quad (1.242)$$

$$\ln \left(1 - z\sqrt{\frac{p}{Nq}} \right) \approx -z\sqrt{\frac{p}{Nq}} - \frac{z^2}{2} \frac{p}{Nq}; \quad \ln \left(1 + z\sqrt{\frac{q}{Np}} \right) \approx z\sqrt{\frac{q}{Np}} - \frac{z^2}{2} \frac{q}{Np}. \quad (1.243)$$

Dies ist Gl. (1.240) eingesetzt und nach Potenzen von z sortiert liefert:

$$h \approx z^3 \frac{A}{\sqrt{N}} + z^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{N} \right) + z^1 \frac{C}{\sqrt{N}}, \quad (1.244)$$

wobei es sich bei A, B, C um beschränkte Größen handelt. Damit ergibt sich also:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h = \frac{z^2}{2} \quad \text{und somit} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{(x-Np)^2}{2Npq}}. \quad (1.245)$$

Da ja wie bei der ursprünglichen Binomialverteilung immer noch $\mu = Np$ und $\sigma^2 = Npq$ gilt, lautet nun das endgültige Ergebnis:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad \blacksquare \quad (1.246)$$

Natürlich lässt sich auch für die Gaussverteilung eine momenterzeugende Funktion in geschlossener Form angeben:

$$G(t) = \int e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \quad (1.247)$$

1.5.6 Exponentialverteilung, Erlang-Verteilung

Die Exponentialverteilung besitzt die Form

$$P(x) = \theta(x) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \quad (1.248)$$

und beschreibt die Wahrscheinlichkeit der Abstände (räumlich, zeitlich, ...) zwischen dem Auftreten eines zufälligen, wiederkehrenden Ereignisses. Ein anschauliches Beispiel dafür ist die Verteilung der Zahl der vergeblichen Versuche beim Würfeln, nach einer $\boxed{\cdot\cdot\cdot}$ die nächste $\boxed{\cdot\cdot\cdot}$ zu erhalten.

Ausgegangen wird zunächst von einem diskretisierten „Raum“, unterteilt in Zellen der Breite Δx , in dem ein Ereignis (ein „Treffer“) immer wieder zufällig auftritt; um ein Bild vor Augen zu haben, könnte dies etwa so aussehen: $\cdots \boxed{\bullet} \boxed{} \boxed{\bullet\bullet} \boxed{\bullet} \boxed{} \boxed{} \boxed{\bullet} \cdots$. Für die Wahrscheinlichkeit p eines Treffers in einer Raumzelle benötigt man die mittlere Häufigkeit, d.h. die Zahl der Treffer T , die während einer Länge L anzutreffen sind. Dann gilt:

$$p = \frac{T \cdot \Delta x}{L} \quad \text{und} \quad \bar{p} = \frac{L - T \cdot \Delta x}{L} = 1 - p.$$

Die Wahrscheinlichkeit für N Nicht-Treffer, gefolgt von einem Treffer ist dann:

$$W = \left(1 - \frac{T \cdot \Delta x}{L}\right)^N \cdot \frac{T \cdot \Delta x}{L}.$$

Unter Verwendung von $N = x/\Delta x$ mit x als neuer Variablen und dem mittleren Abstand $\mu = L/T$ erhält man:

$$W = \left(1 - \frac{\Delta x}{\mu}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \cdot \frac{\Delta x}{\mu} \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{=} e^{-\frac{x}{\mu}} \frac{1}{\mu} dx \stackrel{!}{=} P(x) dx. \quad (1.249)$$

Da nur positive Abstände vorkommen können, ergibt sich Gl. (1.248) als die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte.

Es fällt auf, dass gemäß der Exponentialverteilung kleine Abstände mit der größten Häufigkeit vorkommen. Vermutlich entspricht dies der tradierten Erfahrung, die sich im Sprichwort „Ein Unglück kommt selten allein!“ [9] niederschlägt. Zufällige Ereignisse müssen aber nicht notwendigerweise schlecht sein! Mit gleichem Recht kann man deshalb behaupten „Glück kommt selten allein!“ [18].

Für die Exponentialverteilung lautet die momenterzeugende Funktion:

$$G(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{xt} e^{-\frac{x}{\mu}} dx = \frac{1}{1 - \mu t}; \quad (1.250)$$

daraus resultieren die Momente:

$$\langle x \rangle = \mu, \quad \langle x^2 \rangle = 2\mu^2. \quad (1.251)$$

Wie erwartet handelt es sich bei μ um den Mittelwert, und für die Varianz findet man:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \mu^2. \quad (1.252)$$

Die Exponentialverteilung tritt auch im wichtigen Fall von homogenen (d.h. räumlich/zeitlich unabhängigen) Änderungen auf. Typischerweise kann man sich dazu einen Teilchenstrahl vorstellen, dessen Intensität $I(x)$ sich dadurch ändert, dass Teilchen an zufälligen Orten entlang des Strahls absorbiert werden („Schwächung“). Durch diese Teilchenabsorption als zufälliges Ereignis irgendwo im Strahlengang ist die Problemstellung völlig analog zu oben. Die *relative* Intensitätsänderung soll ortsunabhängig, also konstant sein (Homogenität):

$$\frac{\frac{d}{dx} I(x)}{I(x)} = -C (= \text{const}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} I(x) = -C \cdot I(x) \quad \Rightarrow \quad I(x) = I_0 \cdot e^{-Cx}. \quad (1.253)$$

Das Vorzeichen von C entscheidet, ob auf diese Weise eine Verstärkung oder eine Abschwächung beschrieben wird. Im Fall einer Abschwächung beträgt die mittlere freie Weglänge dann $\langle x \rangle = 1/C$.

Aufschlußreich ist die Mehrfachfaltung der Exponentialfunktion mit sich selbst. Generell soll für ein n -faches Faltungsprodukt eine Schreibweise verwendet werden, die analog zur Potenzschreibweise ist:

$$P^{*n} := \underbrace{P * P * \dots * P}_{n\text{-mal}}. \quad (1.254)$$

Die Exponentialfunktion mit sich selbst gefaltet ergibt:

$$P * P = P^{*2} = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi}{\mu}} \theta(x - \xi) e^{-\frac{x-\xi}{\mu}} d\xi = \frac{1}{\mu^2} e^{-\frac{x}{\mu}} \int_0^x d\xi = \frac{x}{\mu} P. \quad (1.255)$$

Für beliebige $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$P^{*n} = \frac{x^{n-1}}{\mu^{n-1} (n-1)!} P. \quad (1.256)$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion: Für P^{*2} ist die Richtigkeit gezeigt; der Induktionsschritt $n \rightarrow (n+1)$ lautet:

$$P^{*n} * P = \frac{1}{\mu^{n+1}} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi}{\mu}} \xi^{n-1} \theta(x - \xi) e^{-\frac{x-\xi}{\mu}} d\xi = \frac{1}{\mu^{n+1}} \frac{x^n}{n!} e^{-\frac{x}{\mu}} = \frac{x^n}{\mu^n} \frac{1}{n!} P. \quad \blacksquare \quad (1.257)$$

Relevant wird dieser Zusammenhang bei Summation der Abstände: Ist nach der Wahrscheinlichkeit von genau T Treffern auf einer Länge L gefragt, dann ist dies gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit, dass sich die T gegenseitigen Abstände zu L addieren. Nach den Überlegungen in Zusammenhang mit Gl. (1.225) kann diese Wahrscheinlichkeitsverteilung (sog. **Erlang-Verteilung**) formuliert werden als:

$$P(T, L) = P^{*T}(L) = \frac{L^{T-1}}{(T-1)!} \frac{e^{-L/\mu}}{\mu^T}. \quad (1.258)$$

μ war der mittlere Trefferabstand (vgl. Gl. (1.251)), folglich beschreibt $1/\mu$ die mittlere Trefferhäufigkeit. Deshalb ergibt sich als Erwartungswert λ für die Zahl der Treffer auf der Länge L : $\lambda = L/\mu$. Dies eingesetzt liefert die Verteilung:

$$P_\lambda(T) = \frac{1}{L} \frac{\lambda^T}{(T-1)!} e^{-\lambda}. \quad (1.259)$$

Interessant ist schließlich der Grenzfall $n \gg 1$ für $P^{*(n+1)}$. Wegen der Summation der Varianzen (vgl. Gl. (1.224)) verbreitert sich diese Verteilung immer mehr, deshalb wird nun die neue Variable $z := x/n$ (für $n \geq 1$) verwendet, die diesem Auseinanderlaufen durch Zurückskalieren entgegenwirkt. Der Einfachheit halber wird außerdem $\mu = 1$ gesetzt. Die Verteilung lautet dann:

$$P^{*(n+1)} = \frac{x^n}{n!} e^{-x} = \frac{n^n}{n!} e^{-n(z - \ln z)}. \quad (1.260)$$

Mit der Stirling-Formel (Kap. 1.5.1) wird der Vorfaktor genähert:

$$\frac{n^n}{n!} \approx \frac{n^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}};$$

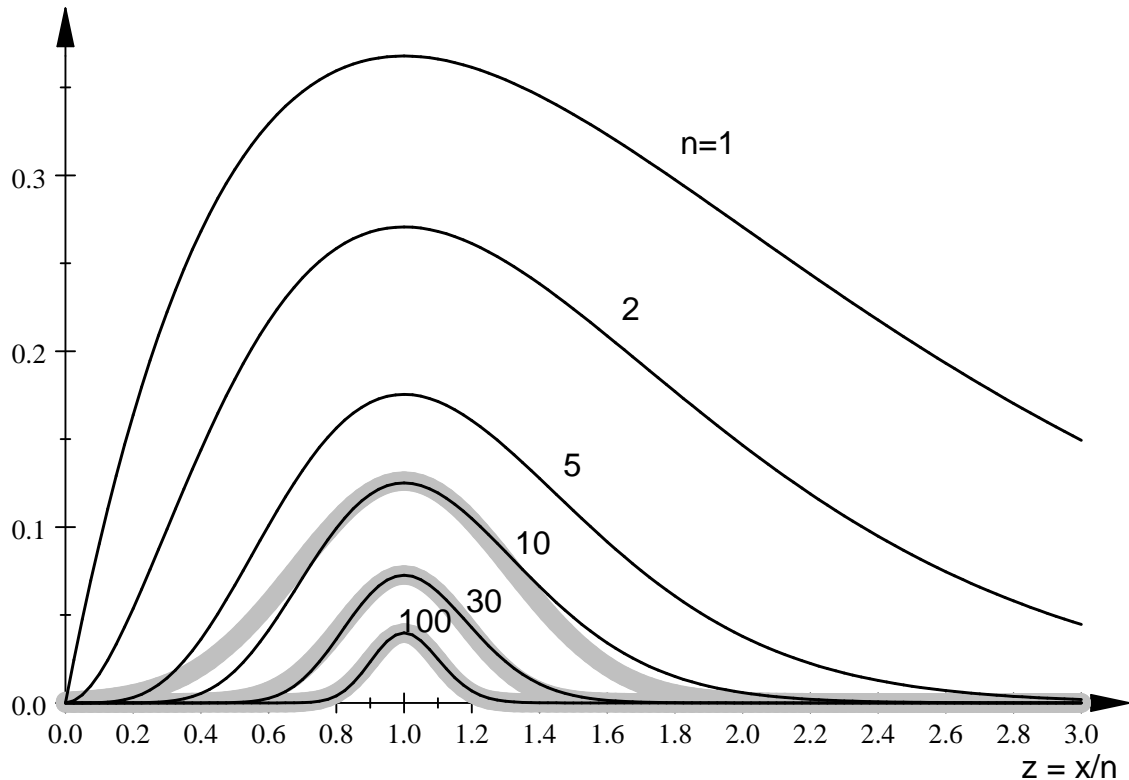


Abbildung 1.14: Darstellung der Vielfachfaltung $P^{*(n+1)}(z)$ für verschiedene Werte von n (mit $\mu = 1$). Die entsprechenden Gauss-Approximationen nach Gl. (1.261) sind in dezentem Grau gehalten. (Der Mittelwert der Kurven liegt bei $(n + 1)/n$.)

der Exponent kann um $z = 1$ entwickelt werden:

$$z - \ln z \approx 1 + \frac{1}{2}(z - 1)^2.$$

Im Ergebnis zeigt sich damit eine Gaussverteilung:

$$P^{*(n+1)} \approx \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n(1+\frac{1}{2}(z-1)^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{n}{2}(z-1)^2}. \quad (1.261)$$

Der hier beschriebene Übergang Exponential- \rightarrow Poisson- \rightarrow Gaussverteilung ist in Abb. 1.14 dargestellt. Was sich hier zeigt, ist nur eine Manifestation (und ein gutes Beispiel!) einer viel allgemeineren Gesetzmäßigkeit, nämlich des *Zentralen Grenzwertsatzes*.

1.5.7 Zentraler Grenzwertsatz

In Kap. 1.5.2 ist gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsgrößen sich als Faltung der Einzelverteilungen darstellt. Darüber kann eine generelle Aussage gemacht werden: Der Zentrale Grenzwertsatz besagt, dass jede Vielfachfaltung von Verteilungen (wenn sie jeweils Mittelwert und Standardabweichung besitzen) stets in eine Gaussverteilung mündet. **Beweis** (nach [13]):

Seien X_i einzelne Zufallsgrößen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_i(x)$ und der Erzeugendenfunktion $G_i(x)$; gesucht ist die Verteilung für

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} X_i \right).$$

Für jeden einzelnen Summanden lautet in dieser Form dann die Verteilung $nP_i(n \cdot x)$ und die Erzeugendenfunktion $G_i(t/n)$. Diese werden in Reihe entwickelt (vgl. Gl. (1.220)):

$$G_i\left(\frac{t}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} G_i \Big|_{t=0} \frac{1}{n^k} \cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle x_i^k \rangle \left(\frac{t}{n}\right)^k.$$

Nach Gl. (1.214) gilt $\langle x_i^2 \rangle = \mu_i^2 + \sigma_i^2$, also:

$$G_i\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + \mu_i \frac{t}{n} + \frac{1}{2} (\mu_i^2 + \sigma_i^2) \left(\frac{t}{n}\right)^2 + O\left(\frac{t^3}{n^3}\right);$$

ein Vergleich mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion in der Form:

$$\exp\left(\mu_i \frac{t}{n} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 \left(\frac{t}{n}\right)^2\right) = 1 + \mu_i \frac{t}{n} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 \left(\frac{t}{n}\right)^2 + \frac{1}{2} \mu_i^2 \left(\frac{t}{n}\right)^2 + O\left(\frac{t^3}{n^3}\right)$$

zeigt Übereinstimmung bis einschließlich zweiter Ordnung. (Hier wird deutlich, warum die einzelnen Verteilungen jeweils ein μ_i bzw. ein σ_i besitzen müssen; die Lorentzfunktion und die sinc-Funktion sind zwei Beispiele, für die kein σ existiert, und da trifft die Aussage des Satzes auch tatsächlich nicht zu.) Für die momenterzeugende Funktion der Gesamtverteilung ergibt sich für $n \gg 1$ deshalb:

$$G(t) = \prod_i G\left(\frac{t}{n}\right) \approx e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mu & := \frac{1}{n} \sum_i \mu_i \\ \sigma^2 & := \frac{1}{n^2} \sum_i \sigma_i^2 \end{cases}$$

dies ist aber genau die Form der momenterzeugenden Funktion einer Gaussverteilung (vgl. Gl. (1.247)). Wegen der eindeutigen Zuordnung von Erzeugendenfunktion und Verteilung (siehe Reihenentwicklung) muss deshalb eine Gaussverteilung vorliegen. Sind insbesondere die Einzelverteilungen identisch, dann folgt $\mu = \mu_i$ und $\sigma = \sigma_i/\sqrt{n}$. ■

Die große Tragweite des Zentralen Grenzwertsatzes in der Statistik erklärt die fundamentale Bedeutung und die „Allgegenwart“ der Gaussverteilung.

1.5.8 Stichproben und Fehlerrechnung

Schätzfunktionen Werden empirisch Werte in Stichproben erfasst, dann ist typischerweise deren exakte Verteilung unbekannt; dies gilt insbesondere für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 . Für diese Parameter der Verteilung gibt es *Schätzfunktionen*: Der Mittelwert μ wird durch einen empirischen Mittelwert \bar{x} aus der Anzahl n der Stichproben geschätzt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.262)$$

Die Schätzfunktion für die Varianz aus den empirischen Werten lautet:

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (1.263)$$

was etwas größer als die mittlere quadratische Abweichung von \bar{x} ist. Anschaulich gesprochen stellt der Nenner $n-1$ die Zahl der Freiheitsgrade (bei festgehaltenem \bar{x}) dar. Die substantielle Begründung

dafür lautet, dass Schätzfunktionen *erwartungstreu* sein sollen. Darunter versteht man die naheliegende Forderung, dass der Erwartungswert der Schätzfunktion den entsprechenden Parameter der Verteilung repräsentieren soll. Konkret für die Gln. (1.262)(1.263) heißt das:

$$\langle \bar{x} \rangle \stackrel{!}{=} \mu; \quad \langle s^2 \rangle \stackrel{!}{=} \sigma^2; \quad (1.264)$$

und dies wird tatsächlich nur mit obiger Form so erfüllt:

- Für den Mittelwert: Der Ausdruck $1/n \sum_i x_i$ ist unproblematisch, da darin kein Schätzwert eines anderen Parameters enthalten ist. Man findet (mit Gl. (1.213)):

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{n} \sum_i \langle x_i \rangle = \frac{1}{n} n \mu = \mu. \quad (1.265)$$

- Für die Varianz: (Hier wird wiederholt von Gl. (1.217) Gebrauch gemacht.) Zunächst betrachtet man den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \langle (x_i - \bar{x})^2 \rangle &= \langle ((x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu))^2 \rangle = \text{var}(x_i - \bar{x}) = \text{var}(x_i) - \text{var}(\bar{x}) \\ &= \langle (x_i - \mu)^2 \rangle - \langle (\bar{x} - \mu)^2 \rangle; \end{aligned}$$

dies ist wesentlich, weil es gerade den – vielleicht nicht unmittelbar einzusehenden – Unterschied zwischen $\langle (x_i - \bar{x})^2 \rangle$ und $\langle (x_i - \mu)^2 \rangle$ zeigt. Man findet:

$$\begin{aligned} \langle (\bar{x} - \mu)^2 \rangle &= \langle \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - \mu \right)^2 \rangle = \langle \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{n^2} \text{var} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(x_i) = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Das ist die wohlbekannteste Aussage, dass die Varianz eines Mittelwerts um den Faktor $1/n$ verringert ist. Und weiter:

$$\langle (x_i - \mu)^2 \rangle = \text{var}(x_i) = \sigma^2.$$

Insgesamt bestätigt sich also:

$$\langle s^2 \rangle = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \langle (x_i - \bar{x})^2 \rangle = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \right) = \sigma^2.$$

Ein typisches Beispiel für die Erhebung von Stichproben ist die Erfassung von Messwerten, die alle mit einem Fehler behaftet sind und die um ihren wahren Wert schwanken. Wirken viele unabhängige Ursachen additiv bei der Entstehung des Fehlers mit, dann kann man außerdem aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes von einer Normalverteilung der Fehler ausgehen.

Fehlerfortpflanzung Häufig dienen fehlerbehaftete Größen als Argumente von Funktionen; dann ist es wichtig zu wissen, wie sich diese Fehler als Gesamtfehler des Funktionswertes fortpflanzen. Beispielhaft soll dies an einer Funktion f mit zwei Variablen x und y gezeigt werden:

Für die Variablen sollen die üblichen Schätzfunktionen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_x} x_i \quad \text{und} \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n_x - 1} \sum_{i=1}^{n_x} (x_i - \bar{x})^2}$$

und die Abkürzung

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} =: \partial \bar{f}_x$$

gelten; n_x bezeichnet die Anzahl der Stichproben aus x . Gleiches gelte analog für y . Mit der Taylor-Näherung

$$f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \partial \bar{f}_x \cdot (x - \bar{x}) + \partial \bar{f}_y \cdot (y - \bar{y})$$

folgt für den geschätzten Fehler von f :

$$\begin{aligned} s_f &= \sqrt{\frac{1}{n_x n_y - 1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (f(x_i, y_j) - f(\bar{x}, \bar{y}))^2} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{1}{n_x n_y - 1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (\partial \bar{f}_x \cdot (x_i - \bar{x}) + \partial \bar{f}_y \cdot (y_j - \bar{y}))^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{n_x n_y - 1} \left[(\partial \bar{f}_x)^2 \sum_{i,j} (x_i - \bar{x})^2 + (\partial \bar{f}_y)^2 \sum_{i,j} (y_i - \bar{y})^2 + 2 \cdot \underbrace{\partial \bar{f}_x \partial \bar{f}_y \sum_{i,j} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}_{=0} \right]} = \\ &= \sqrt{(\partial \bar{f}_x)^2 \cdot \frac{n_y(n_x - 1)}{n_x n_y - 1} s_x^2 + (\partial \bar{f}_y)^2 \cdot \frac{n_x(n_y - 1)}{n_x n_y - 1} s_y^2} \approx \sqrt{(\partial \bar{f}_x)^2 s_x^2 + (\partial \bar{f}_y)^2 s_y^2}. \end{aligned}$$

Diese explizite Herleitung hat den Vorteil, dass die Bedingungen der Gültigkeit der zu entwickelnden Formel offenbar werden: Die Fehler müssen „klein“ sein, d.h. die obige Taylor-Entwicklung muss tatsächlich nach der ersten Ordnung abgebrochen werden können; die letzte Näherung beruht außerdem auf „großen“ Stichprobenzahlen n_x, n_y , d.h. auf einer „guten“ Fehlerstatistik. In dieser Weise ergibt sich das wichtige **Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauss**:

$$f = f(\dots, x_n, \dots) \implies s_f = \sqrt{\sum_n \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\dots, \bar{x}_n, \dots} \cdot s_n \right)^2}. \quad (1.266)$$

Häufig kommen einfache Spezialfälle vor:

- Die Funktion f setzt sich additiv aus den Variablen zusammen:

$$f(\dots, x_n, \dots) = \sum_n \pm_n x_n \implies \frac{\partial f}{\partial x_n} = \pm_n \cdot 1; \implies s_f = \sqrt{\sum_n s_n^2}; \quad (1.267)$$

ein absoluter Fehler berechnet sich hier aus den absoluten Einzelfehlern.

- Die Funktion f setzt sich multiplikativ aus den Variablen zusammen:

$$f(\dots, x_n, \dots) = \prod_n x_n^{\pm_n \cdot 1} \implies \frac{\partial f}{\partial x_n} = \pm_n \cdot \frac{f}{x_n} \implies s_f = \sqrt{\sum_n \left(\frac{f}{x_n} s_n \right)^2};$$

ein relativer Fehler ergibt sich so aus den relativen Einzelfehlern:

$$\frac{s_f}{f} = \sqrt{\sum_n \left(\frac{s_n}{x_n}\right)^2}. \quad (1.268)$$

Ist die Fehlerverteilung vom Prinzip her bekannt, dann können Fehlergrenzen so weit gefasst werden, dass sie quasi jeden auftretenden Fehlerwert enthalten. Dies geschieht mit einem **Erweiterungsfaktor** k : Das Intervall $[\mu - k \cdot \sigma, \mu + k \cdot \sigma]$ umfasst dann die Verteilung möglichst vollständig. Relevant sind vor allem:

- „Binärverteilung“, es kommen nur zwei Werte vor:

$$p(x) = \frac{1}{2} \left(\delta((x - (\mu - a))) + \delta((x - (\mu + a))) \right); \quad \Rightarrow \quad \sigma = a; \quad \Rightarrow \quad k = 1;$$

- Gaussverteilung:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \Rightarrow \quad k = 2; \quad (\text{umfasst ca. 95\% der Verteilung})$$

- Rechteckverteilung:

$$p(x) = \Pi(x); \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{2\sqrt{3}}; \quad k \cdot \sigma \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}; \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{3} \approx 1.73$$

1.6 Etwas Systemtheorie

Wird kodierte Information durch ein „System“ in eine andere Darstellung überführt, resultiert dadurch u.U. ein Informationsverlust. Bei der Messung und Wiedergabe von Daten ist dies beispielhaft der Fall. Die Systemtheorie ermöglicht zu dieser Problematik den allgemeinen Zugang. Deshalb soll nun auf dieses Gebiet, das schon für sich genommen sehr interessant ist, ein scheuer Blick geworfen werden.

1.6.1 LTI-Systeme: esf, lsf, psf und MTF

Einleitend soll hier die Konvention getroffen werden, dass das Zeichen „ \rightsquigarrow “ eine Signalverarbeitung durch das System bedeutet, also:

$$\text{Eingangssignal } s(t) \rightsquigarrow g(t) \text{ Ausgangssignal.} \quad (1.269)$$

Ein System wird demnach als „black box“ behandelt; es interessiert nicht, was in dessen Inneren stattfindet, sondern es wird zu einem bestimmten Eingangssignal $s(t)$ nur das Ausgangssignal $g(t)$, also die Antwort des Systems darauf, betrachtet.

Durch diese Art der Charakterisierung von Systemen, nämlich rein anhand ihrer Systemantwort, kann eine effiziente Einteilung in Klassen erfolgen. Die wichtigste Klasse von Systemen ist wohl die der sog. *LTI-Systeme* (linear time invariant). Wie bereits diese Bezeichnung suggeriert, gilt für solche Systeme:

- keine explizite Zeitabhängigkeit; es gilt $s(t + T) \rightsquigarrow g(t + T)$; ein versetztes Signal führt also zu einer gleichermaßen versetzten Antwort, oder genereller formuliert: Die Systeme besitzen keine innere Uhr;
- Linearität in dem Sinne, dass gilt:

$$s(t) = \sum_n c_n s_n(t) \rightsquigarrow \sum_n c_n g_n(t) = g(t); \quad (1.270)$$

eine Linearkombination von Eingangssignalen führt also zu einer Linearkombination von den entsprechenden Ausgangssignalen mit *denselben* Koeffizienten.

Ein Eingangssignal kann in eine Summe von normierten Rechtecksfunktionen $r(t)$ mit

$$r(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & : 0 < t < \Delta t; \\ 0 & : \text{sonst;} \end{cases} \quad (1.271)$$

zerlegt werden; es lautet dann:

$$s(t) \approx \sum_n s(n \cdot \Delta t) \cdot r(t - n \cdot \Delta t) \cdot \Delta t; \quad (1.272)$$

mit $r(t) \rightsquigarrow q(t)$ folgt daraus nach Gl. (1.270) für das Ausgangssignal:

$$g(t) \approx \sum_n s(n \cdot \Delta t) \cdot q(t - n \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \quad (1.273)$$

Es ist wichtig zu erkennen, dass in beiden Summen (1.272)(1.273) die *identischen* Koeffizienten $s(n \cdot \Delta t)$ enthalten sind. Dies sind tatsächlich *Koeffizienten* – die Variable t kommt darin nicht mehr vor.

Nun erfolgt der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$; die Rechtecksfunktion wird dann zu einer Deltafunktion (vgl. Gl. (1.44))

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} r(t) = \delta(t) \quad (1.274)$$

und die Systemantwort auf eine Deltafunktion wird zu:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} q(t) =: \text{psf}(t). \quad (1.275)$$

Diese spezielle Antwortfunktion $\text{psf}(t)$ ist dann also definiert als Antwort des Systems auf eine Deltafunktion

$$\delta(t) \rightsquigarrow \text{psf}(t) \quad (1.276)$$

und wird deshalb als *Stoßantwort* oder *Punktspreizfunktion* **psf** (engl.: point spread function) bezeichnet. Relevant ist dies insbesondere deshalb, da das Frequenzspektrum einer Deltafunktion konstant ist, und somit *alle* Frequenzen mit gleicher Wichtung einbezogen sind (vgl. Gl. (1.49)).

Aufschlußreich sind nun die kontinuierlichen Analoga zu den Gln. (1.272)(1.273):

$$s(t) = \int s(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = s(t), \text{ wie es auch sein soll (Gl. (1.45));} \quad (1.277)$$

$$g(t) = \int s(\tau) \cdot \text{psf}(t - \tau) d\tau = (s * \text{psf})(t); \quad (1.278)$$

Gl. (1.278) ist hier das erste wesentliche Ergebnis: Die Systemantwort ergibt sich aus der Faltung des Eingangssignals mit der systemspezifischen Stoßantwort:

$$s(t) \rightsquigarrow (s * \text{psf})(t). \quad (1.279)$$

Damit ist evident, dass die psf die vollständige Information über das jeweilige Systemverhalten enthält.

Die Fourier-Transformierte der Stoßantwort wird als **MTF** (Modulations-Transfer-Function) oder als **MÜF** (Modulations-Übertragungs-Funktion) bezeichnet:⁵

$$\text{psf}(t) \circ \longrightarrow \text{MTF}(\nu). \quad (1.280)$$

Die MTF ist in verschiedener Hinsicht wichtig:

- Die MTF erlaubt eine Einschätzung dessen, was mit einem Signal bei der Verarbeitung durch ein System passiert; sie gibt nämlich an, wie die einzelnen Frequenzen, aus denen das Signal besteht, gewichtet werden: Bei einem *idealen System* wäre die psf eine Deltafunktion, da dann Ein- und Ausgangssignal äquivalent sind. Es würde also gelten:

$$\text{psf}(t) = \delta(t) \implies g(t) = s(t); \quad (\text{Eingangs-} = \text{Ausgangssignal}) \quad (1.281)$$

$$\implies \text{MTF}(\nu) = 1; \quad (\text{nach Gl. (1.47)}) \quad (1.282)$$

d.h. alle Frequenzen kommen im Eingangssignal wie auch in der Systemantwort gleichermaßen vor, und werden in gleicher Weise gewichtet. In einem realistischen System wird dagegen $\text{MTF}(\nu)$

⁵In der Literatur wird häufig lediglich der Absolutbetrag darunter verstanden.

mit zunehmender Frequenz abnehmen. Dies erlaubt eine direkte Beurteilung des räumlichen oder zeitlichen Auflösungsvermögens.

Die besagte Frequenzgewichtung lässt sich direkt erkennen, indem man dem System ein Signal fester Frequenz ν vorgibt (vgl. Gl. (1.34)):

$$\begin{aligned} s(t) = e^{2\pi\nu t} \quad \rightsquigarrow \quad g(t) &= (s * \text{psf})(t) = \int \text{psf}(\tau) e^{2\pi\nu(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{2\pi\nu t} \cdot \text{MTF}(\nu). \end{aligned} \quad (1.283)$$

Das Ausgangssignal ist dann identisch mit dem Eingangssignal, gewichtet eben mit dem Wert der MTF bei der Frequenz ν . (Allerdings: Bei nicht-symmetrischer psf ist die MTF komplexwertig; bzgl. des Signals ergibt sich dann eine Phasenverschiebung. Bei symmetrischer psf ist die MTF stets reellwertig, kann aber für bestimmte Frequenzen negativ werden.)

- Bei Verknüpfung (d.h. Hintereinanderschaltung) mehrerer Systeme ist das Eingangssignal eines jeweils weiteren Systems das Ausgangssignal des vorhergehenden, d.h. Gl. (1.279) ist mehrfach anzuwenden, und so folgt:

$$g(t) = s(t) * \text{psf}_1(t) * \text{psf}_2(t) * \dots * \text{psf}_n(t). \quad (1.284)$$

Auf Grund des Faltungssatzes (Kap. 1.1.2) lässt sich eine solche Verknüpfung viel einfacher im Fourier-Raum betrachten; mit $S(\nu) \bullet \circ s(t)$ erhält man dann nämlich:

$$g(t) \circ \bullet G(\nu) = S(\nu) \cdot \underbrace{\text{MTF}_1(\nu) \cdot \text{MTF}_2(\nu) \cdot \dots \cdot \text{MTF}_n(\nu)}_{\text{MTF}_{\text{gesamt}}}. \quad (1.285)$$

Bei einer solchen Hintereinanderschaltung ist also die MTF des Gesamtsystems gleich dem Produkt der MTFs der Einzelsysteme.

Alle hier gemachten Aussagen, die im (t, ν) -Ensemble angegeben sind, gelten allgemein ebenso im (x, κ) -Ensemble. Außerdem ist es unproblematisch, bei einem (realen) System eine psf *empirisch festzustellen* und es damit zu beschreiben. Umgekehrt tritt aber ein wesentlicher Unterschied zwischen dem (t, ν) - und dem (x, κ) -Ensemble bzgl. der *freien Wahl* einer psf (etwa zur Erfüllung bestimmter Eigenschaften) zutage: Im (x, κ) -Ensemble macht es keine Schwierigkeiten, wenn das Ausgangssignal gegenüber dem Eingangssignal nach *allen Raumrichtungen* verbreitert ist, es ist sogar gewissermaßen der „Normalfall“. Dagegen bedeutet im (t, ν) -Ensemble eine allseitige zeitliche Verbreiterung des Ausgangssignals, dass nicht nur die Zukunft, sondern auch die Vergangenheit betroffen ist. Dies verletzt das Kausalitätsprinzip, wie leicht zu sehen ist: Die Systemantwort auf einen δ -Impuls zum Zeitpunkt $t = 0$ ist bekanntlich die psf selbst (vgl. Gl. (1.276)). Eine (i.A.) psf($t < 0$) $\neq 0$ bedeutet, dass die Systemantwort zeitlich *vor* dem Eingangssignal beginnt. Um Kausalität sicherzustellen muss also gefordert werden (vgl. Gl. (1.108)):

$$\text{psf}(t < 0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \iff \quad \text{psf}(t) \stackrel{!}{=} \theta(t) \cdot \text{psf}(t). \quad (1.286)$$

Für die MTF gelten folglich dann stets die Kramers-Kronig-Relationen (Kap. 1.2.9).

Eine in der Praxis wichtige Größe ist die sog. *Linienspreizfunktion* $\text{lsf}(x)$ (engl.: *line-spread-function*). Dabei handelt es sich um das eindimensionale Analogon der psf(x, y). Im Folgenden wird

angenommen, dass Linien und Kanten längs y orientiert sind. Die lsf lässt sich errechnen aus der Abbildung einer scharfen Kante $\theta(x)$ (vgl. Kap. 1.2.9); dieses Bild liefert die sog. *Kantenspreizfunktion* $\text{esf}(x)$ (engl.: *edge-spread-function*), und die ist meist besonders einfach zu erhalten. Es gilt der grundsätzliche Zusammenhang:

$$\text{esf}(x) = \theta(x) * \text{lsf}(x); \quad (1.287)$$

mit der Rechenregel für Ableitung (Gl. (1.29)) ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{esf}(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\theta(x) * \text{lsf}(x)) = \delta * \text{lsf} = \text{lsf}(x). \quad (1.288)$$

Die Ableitung der esf liefert also direkt die lsf.

Im Folgenden wird von einer *radialsymmetrischen* psf ausgegangen. (Die Kante $\theta(x)$ also längs y zu orientieren bedeutet dann keine Einschränkung der Allgemeinheit.) Generell kann andererseits das Bild einer Kante formuliert werden als

$$\text{esf}(x) = \theta(x) * \text{psf}(x, y). \quad (1.289)$$

Analog ergibt sich dann

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{esf}(x) = \delta(x) * \text{psf}(x, y) = \int \text{psf}(x, y) dy. \quad (1.290)$$

Mit Gl. (1.288) folgt daraus der interessante Zusammenhang

$$\text{lsf}(x) = \int \text{psf}(x, y) dy, \quad (1.291)$$

die Abel-Transformation (Kap. 1.3.4) der psf liefert also die lsf.

Nun kann elegant vom Fourier-Schicht-Theorem (Kap. 1.4.1), bzw. wegen der angenommenen Radialsymmetrie der psf, vom Fourier-Abel-Hankel-Ring (S. 30), Gebrauch gemacht werden: Da die lsf bereits die Abel-Transformierte der psf darstellt, ergibt die eindimensionale (!) Fourier-Transformation der lsf direkt die zweidimensionale radialsymmetrische MTF(ρ), also:

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{esf}(x) = \text{lsf}(x) \quad \circ \bullet \quad \text{MTF}(\rho). \quad (1.292)$$

Ansonsten muss festgestellt werden, dass die lsf *alleine* nur beschränkten Nutzen hat: Da ja die lsf die Systemantwort auf eine Linie $\delta(x)$ (d.h. eine Linie in y -Richtung) darstellt, muss für eine Eingangsfunktion gelten:

$$s(x, y) \stackrel{!}{=} s(x, y) * \delta(x) = \int s(\xi, \zeta) \delta(x - \xi) d\xi = s(x, \zeta); \quad (\forall y, \zeta) \Rightarrow s(x, y) = s(x).$$

Die lsf lässt sich also direkt nur dann anwenden, wenn sich Ein- und Ausgangsfunktion nicht in Linienrichtung, sondern nur senkrecht dazu ändern.

1.6.2 MTF, CTF und die Coltman–Formeln

Speziell bei direkten Abbildungssystemen erfolgt die explizite Bestimmung der MTF mit Hilfe gitterperiodischer Strukturen. Die wesentliche Idee dazu entstammt Gl. (1.283): Wird eine solche periodische Struktur

$$s(x) = A_0 + A_1 \cos(2\pi\kappa x) \quad (\text{mit } A_0 \geq A_1)$$

der Abbildung unterworfen, dann lautet das Ergebnis:

$$\text{psf} * s = A_0 + \text{MTF}(\kappa)A_1 \cos(2\pi\kappa x).$$

Nun wird die sog. „Modulation“ (oder auch „Kontrast“) betrachtet:

$$m(\kappa) := \frac{s_{\max} - s_{\min}}{s_{\max} + s_{\min}}. \quad (1.293)$$

Vor Abbildung beträgt die Modulation $m = m(0) = A_1/A_0$, nach Abbildung gilt $m(\kappa) = \text{MTF}(\kappa)A_1/A_0$. Die MTF kann dann also leicht aus dem Verhältnis der Modulation bestimmt werden als:

$$\text{MTF}(\kappa) = \frac{m(\kappa)}{m(0)}, \quad (1.294)$$

deshalb überhaupt auch der Begriff „Modulationstransferfunktion“.

Solche Sinus–Gitter sind allerdings nur schwer herstellbar. Beispielsweise bei einer Abbildung mittels Röntgenstrahlung bedeutet eine Transmission mit genau sinusförmiger Charakteristik eine explizite Abhängigkeit vom Spektrum der Strahlung. In der Praxis werden deshalb Strichgitter verwendet, d.h. eine Abfolge von Balken und Zwischenräumen gleicher Breite.

Sei $r(\kappa x) := \text{sgn}(\cos(2\pi\kappa x))$ eine Rechteckswelle mit Amplitude 1 und Periode $1/\kappa$ (vgl. Gl. (1.92)), dann kann ein Strichgitter formuliert werden als:

$$s(\kappa x) = A_0 + A_1 r(\kappa x), \quad (\text{wieder mit } A_0 \geq A_1).$$

Analog zu oben läßt sich auch hier der Quotient von $m(\kappa)$ und $m(0)$ ermitteln.⁶ Dieser Wert stellt nun allerdings *nicht* die MTF dar (da eine Rechtecksfunktion i.Allg. eine Formveränderung erfährt), sondern die sog. **CTF** („Contrast–Transfer–Function“). Der Zusammenhang der CTF mit der MTF folgt – wie könnte es auch anders sein! – aus der Fourierzerlegung der Rechteckswelle:

$$\begin{aligned} r(\kappa x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2\pi\kappa(2n+1)x) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\cos(2\pi\kappa x) - \frac{1}{3} \cos(6\pi\kappa x) + \frac{1}{5} \cos(10\pi\kappa x) - \frac{1}{7} \cos(14\pi\kappa x) + \dots \right). \end{aligned}$$

Dann gilt nach Abbildung (insbesondere für die Extrema, mit $\text{psf} > 0$ und symmetrisch):

$$\begin{aligned} \text{CTF}(\kappa) \left(A_0 + A_1 r(\kappa x) \right) &\simeq \text{psf} * \left(A_0 + A_1 r(\kappa x) \right) = \\ &= A_0 + A_1 \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{MTF}((2n+1)\kappa) \cos(2\pi\kappa(2n+1)x). \end{aligned}$$

⁶In der DIN 6847–6:2012–09 wird vorgeschlagen, anstelle der Modulation die Standardabweichung der Gitterabbildung zu verwenden: $\text{CTF}(\kappa) = \sigma(\kappa)/\sigma(0)$.

Für $x = 0$ folgt dann der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \text{CTF}(\kappa) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{MTF}((2n+1)\kappa) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\text{MTF}(\kappa) - \frac{\text{MTF}(3\kappa)}{3} + \frac{\text{MTF}(5\kappa)}{5} - \frac{\text{MTF}(7\kappa)}{7} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.295)$$

Die gesuchte MTF berechnet sich aus der Umkehr dieser Formel, also zunächst:

$$\text{MTF}(\kappa) = \frac{\pi}{4} \text{CTF}(\kappa) + \frac{1}{3} \text{MTF}(3\kappa) - \frac{1}{5} \text{MTF}(5\kappa) + \frac{1}{7} \text{MTF}(7\kappa) - \dots \quad (1.296)$$

Durch Vervielfachung des Arguments folgt sofort:

$$\begin{aligned} \text{MTF}(3\kappa) &= \frac{\pi}{4} \text{CTF}(3\kappa) + \frac{1}{3} \text{MTF}(9\kappa) - \frac{1}{5} \text{MTF}(15\kappa) + \frac{1}{7} \text{MTF}(21\kappa) - \dots \\ \text{MTF}(5\kappa) &= \frac{\pi}{4} \text{CTF}(5\kappa) + \frac{1}{3} \text{MTF}(15\kappa) - \frac{1}{5} \text{MTF}(25\kappa) + \frac{1}{7} \text{MTF}(35\kappa) - \dots \\ \text{MTF}(7\kappa) &= \frac{\pi}{4} \text{CTF}(7\kappa) + \frac{1}{3} \text{MTF}(21\kappa) - \frac{1}{5} \text{MTF}(35\kappa) + \frac{1}{7} \text{MTF}(49\kappa) - \dots \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Werden diese Ausdrücke *successive* in Gl. (1.296) eingesetzt, ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \text{MTF}(\kappa) &= \frac{\pi}{4} \left(\text{CTF}(\kappa) + \frac{1}{3} \text{CTF}(3\kappa) - \frac{1}{5} \text{CTF}(5\kappa) + \frac{1}{7} \text{CTF}(7\kappa) + \frac{1}{11} \text{CTF}(11\kappa) \right. \\ &\quad - \frac{1}{13} \text{CTF}(13\kappa) - \frac{1}{15} \text{CTF}(15\kappa) - \frac{1}{17} \text{CTF}(17\kappa) + \frac{1}{19} \text{CTF}(19\kappa) \\ &\quad + \frac{1}{21} \text{CTF}(21\kappa) + \frac{1}{23} \text{CTF}(23\kappa) - \frac{1}{29} \text{CTF}(29\kappa) + \frac{1}{31} \text{CTF}(31\kappa) \\ &\quad + \frac{1}{33} \text{CTF}(33\kappa) - \frac{1}{35} \text{CTF}(35\kappa) - \frac{1}{37} \text{CTF}(37\kappa) - \frac{1}{39} \text{CTF}(39\kappa) \\ &\quad - \frac{1}{41} \text{CTF}(41\kappa) + \frac{1}{43} \text{CTF}(43\kappa) + \frac{1}{47} \text{CTF}(47\kappa) - \frac{1}{51} \text{CTF}(51\kappa) \\ &\quad - \frac{1}{53} \text{CTF}(53\kappa) - \frac{1}{55} \text{CTF}(55\kappa) + \frac{1}{57} \text{CTF}(57\kappa) + \frac{1}{59} \text{CTF}(59\kappa) \\ &\quad - \frac{1}{61} \text{CTF}(61\kappa) + \frac{1}{65} \text{CTF}(65\kappa) + \frac{1}{67} \text{CTF}(67\kappa) + \frac{1}{69} \text{CTF}(69\kappa) \\ &\quad + \frac{1}{71} \text{CTF}(71\kappa) - \frac{1}{73} \text{CTF}(73\kappa) + \frac{1}{77} \text{CTF}(77\kappa) + \frac{1}{79} \text{CTF}(79\kappa) \\ &\quad + \frac{1}{83} \text{CTF}(83\kappa) + \frac{1}{85} \text{CTF}(85\kappa) - \frac{1}{87} \text{CTF}(87\kappa) - \frac{1}{89} \text{CTF}(89\kappa) \\ &\quad \left. - \frac{1}{91} \text{CTF}(91\kappa) + \frac{1}{93} \text{CTF}(93\kappa) - \frac{1}{95} \text{CTF}(95\kappa) - \frac{1}{97} \text{CTF}(97\kappa) - \dots \right) \end{aligned} \quad (1.297)$$

Für praktische Zwecke macht die Entwicklung in so hohe Ordnungen natürlich keinen Sinn, sondern hier soll lediglich demonstriert werden, dass es nicht einfach die ungeraden Terme sind, die nun vorkommen, sondern die *quadratfreien*⁷ ungeraden Terme (d.h. es fehlen die Terme 9, 25, 27, 45, 49, 63, 75, 81, 99, ...). Die Vorzeichen sind dabei offenbar irregulär (?) verteilt. Die Gleichungen (1.295) und (1.297) sind in der Literatur als „Coltman-Formeln“ bekannt [19].

1.6.3 Abtasttheorem

Eine Digitalisierung von Messwerten bedeutet eine diskrete Abtastung der entsprechenden Daten. Konkret ist damit die Erfassung von Werten kontinuierlicher Funktionen $f(x)$ an äquidistanten Punkten

⁷„Quadratfrei“ ist der zahlentheoretische Begriff für Zahlen, in deren Primzahlzerlegung jede Primzahl höchstens einmal vorkommt.

$x = x_n = n \cdot \Delta x$; ($n \in \mathbb{Z}$) gemeint. Es ist offensichtlich, dass eine solche Folge von Einzelwerten die so abgetastete Funktion nicht notwendigerweise eindeutig festlegt, sondern es können i.Allg. durchaus verschiedene Funktionen die identischen Folgen $f(n \cdot \Delta x)$ liefern, siehe Abb. 1.15.

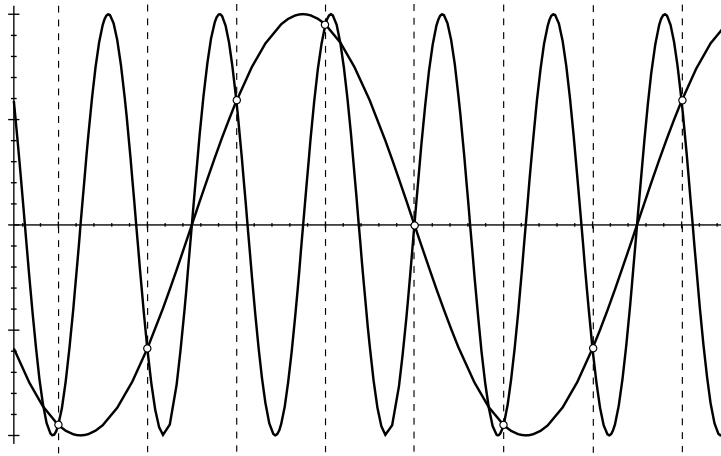


Abbildung 1.15: Beispiel für unterschiedliche Funktionen, die bei äquidistanter Abtastung zu identischen Wertefolgen führen. (In diesem Fall handelt es sich um einen typischen Aliasing-Effekt.)

Die Eindeutigkeit der Zuordnung von Folge und Funktion ist aber in technischen Anwendungen meist zwingend und unter bestimmten Voraussetzungen tatsächlich gegeben. Die wesentlichen Aussagen macht hierzu das *Nyquist-Shannon-Abtasttheorem* [20]:

Ist das Spektrum (d.h. die Fourier-Transformierte $F(\kappa)$) einer Funktion $f(x)$ bandbegrenzt, d.h. ist $F(\kappa) = 0$ außerhalb des Intervalls $[-\kappa^*, +\kappa^*]$ (Abb. 1.16), dann kann man schreiben:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\kappa) e^{i2\pi\kappa x} d\kappa = \int_{-\kappa^*}^{+\kappa^*} F(\kappa) e^{i2\pi\kappa x} d\kappa. \quad (1.298)$$

Für die Funktionswerte, die an äquidistanten Punkten $n \cdot \Delta x$ abgegriffen werden, findet man dann

$$f(n \cdot \Delta x) = \int_{-\kappa^*}^{+\kappa^*} F(\kappa) e^{i2\pi\kappa n \cdot \Delta x} d\kappa. \quad (1.299)$$

Ist andererseits das Spektrum $2\kappa^*$ -periodisch (Abb. 1.16), dann besteht die zugeordnete Funktion ohnehin aus diskreten Werten; es resultiert also eine Fourier-Zerlegung (vgl. Gl. (1.24)) mit den Fourier-Koeffizienten:

$$f_n = \frac{1}{2\kappa^*} \int_{-\kappa^*}^{+\kappa^*} F(\kappa) e^{i2\pi\kappa \frac{n}{2\kappa^*}} d\kappa. \quad (1.300)$$

Für $\Delta x = 1/(2\kappa^*)$ erhält man in den Gleichungen (1.299) und (1.300) im Wesentlichen die selben Ausdrücke:

$$f\left(\frac{n}{2\kappa^*}\right) = 2\kappa^* \cdot f_n. \quad (1.301)$$

Mit anderen Worten: Die Folge der Messwerte ist dann (bis auf einen Faktor) identisch mit den Fourier-Koeffizienten f_n des periodischen Spektrums. Damit legen die Werte der Messpunkte $f(n/(2\kappa^*))$ das

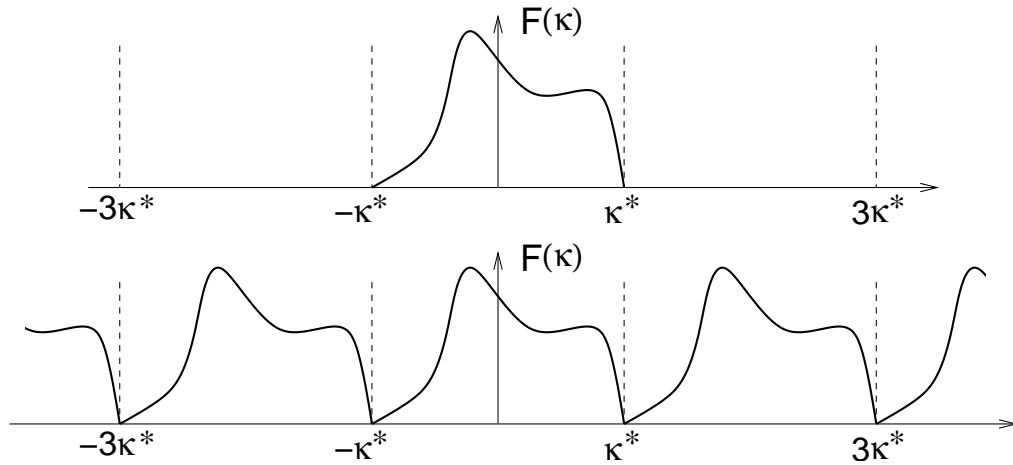


Abbildung 1.16: Zur Veranschaulichung der Spektren: Bandbegrenzt (oben) und $2\kappa^*$ -periodisch (unten).

periodische Spektrum fest und also auch das Spektrum innerhalb des Intervalls $[-\kappa^*, +\kappa^*]$. Anhand dieses Spektrums ist aber auch die abgetastete Funktion $f(x)$ selbst eindeutig bestimmt. Mit:

$$F(\kappa) = \sum_n f_n e^{-i2\pi\kappa \frac{n}{2\kappa^*}} = \frac{1}{2\kappa^*} \sum_n f\left(\frac{n}{2\kappa^*}\right) e^{-i2\pi\kappa \frac{n}{2\kappa^*}} \quad (1.302)$$

lässt sich also die ursprüngliche Funktion vollständig rekonstruieren:

$$f(x) = \frac{1}{2\kappa^*} \int_{-\kappa^*}^{+\kappa^*} \sum_n f\left(\frac{n}{2\kappa^*}\right) e^{-i2\pi\kappa \frac{n}{2\kappa^*} + i2\pi\kappa x} d\kappa = \sum_n f\left(\frac{n}{2\kappa^*}\right) \text{sinc}\left(x \cdot 2\kappa^* - n\right). \quad (1.303)$$

Wegen ihrer besonderen Bedeutung wird die Abtastrate $2\kappa^* = 1/\Delta x$ *Nyquist-Frequenz* κ_{Nyq} genannt. Damit lautet die Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion schließlich:

$$f(x) = \sum_n f\left(\frac{n}{\kappa_{\text{Nyq}}}\right) \text{sinc}\left(\kappa_{\text{Nyq}}\left(x - \frac{n}{\kappa_{\text{Nyq}}}\right)\right). \quad (1.304)$$

Von der Form her wird $f(x)$ also nun dargestellt als diskrete Faltung der Funktionen $f(n/\kappa_{\text{Nyq}})$ und $\text{sinc}(n)$, was nicht überrascht: Der Unterschied zwischen den beiden Formen des Spektrums in Abb. 1.16 ist ja gerade die Multiplikation mit einer Rechtecksfunktion; Gleichung (1.304) ist dann nur eine Konsequenz des Faltungssatzes. Die Konstruktion einer kontinuierlichen Funktion aus einzelnen Abtastwerten bedeutet eine Interpolation; in diesem Fall spricht man von der *Nyquist-Shannon-Interpolation*, siehe Abb 1.17.

Abtastung mit Kammfunktion: Einen eleganten Zugang zum Verständnis des Abtasttheorems bietet die Kammfunktion (vgl. Kap. 1.2.5). Die Abtastung einer Funktion $f(x)$ mit der Frequenz κ' kann formuliert werden als (vgl. Gln. (1.80) und (1.81))

$$|\kappa'| \text{III}(\kappa'x) f(x). \quad (1.305)$$

Aus diesen Abtastwerten kann die Funktion aber nur eben dann korrekt rekonstruiert werden, wenn

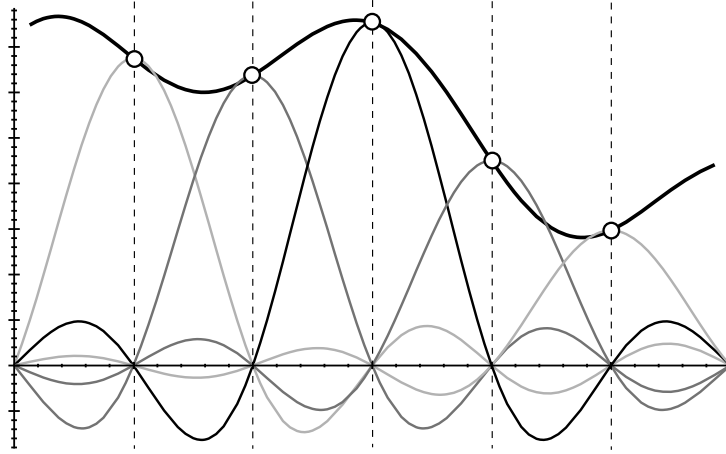


Abbildung 1.17: Nyquist–Shannon–Interpolation einer Funktion anhand äquidistant abgetasteter Einzelwerte. Jeder einzelne Term in der Summe von Gl. (1.304) repräsentiert eine mit dem jeweiligen Abtastwert gewichtete und entsprechend versetzte sinc–Funktion, die an allen anderen Abtastpunkten eine Nullstelle hat. Das Ergebnis ist mit Sicherheit eine entsprechend bandbegrenzte Funktion.

auch deren Spektrum korrekt erfasst ist. Das Spektrum nach Abtastung lautet (mit $f(x) \circ \bullet F(\kappa)$):

$$\begin{aligned} & \left(|\kappa'| \text{III}(\kappa'x) f(x) \circ \bullet \right) \\ \text{III} \left(\frac{\kappa}{\kappa'} \right) * F(\kappa) &= \sum_n |\kappa'| \delta(\kappa - \kappa'n) * F(\kappa) = |\kappa'| \sum_n F(\kappa - \kappa'n). \end{aligned} \quad (1.306)$$

Das durch die Abtastung erhaltene Spektrum ergibt sich also durch periodisches Fortschreiben des Originalspektrums $F(\kappa)$. Um genau dieses Originalspektrum wieder zu erhalten, muss es notwendigerweise bandbegrenzt und der „Wiederholabstand“ κ' hinreichend groß sein, damit es sich im Gesamtspektrum nach Abtastung überlappungsfrei darstellt, siehe Abb. 1.18. (Den Artefakt, der sich nach Rücktransformation durch solche Überlappungen ergibt, bezeichnet man als „Aliasing“.) Schreibt man die Bandbegrenzung wieder als $\{F(\kappa) = 0 \text{ für } \kappa \notin [-\kappa^*, \kappa^*]\}$, dann ergibt sich daraus sofort die Bedingung für die Mindest–Abtastrate als $\kappa' \geq 2\kappa^* = \kappa_{\text{Nyq}}$. Für vollständige Rekonstruktion muss also mindestens mit der Nyquist–Frequenz abgetastet werden.

1.6.4 Erfassung von Messwerten

Eine Messung erfolgt nie in einem unendlich kleinen „Punkt“, sondern stets über einen endlich großen Zeit- oder Raumbereich. Sei dessen Breite B , dann wird bei der Messung am Ort x' über diese Breite (im einfachsten Fall) gemittelt, siehe Abb. 1.19. Gemessen wird dann also tatsächlich eine Funktion $\tilde{f}(x')$ mit:

$$\tilde{f}(x') = \frac{1}{B} \int_{x'-B/2}^{x'+B/2} f(x) dx = \frac{1}{B} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi \left(\frac{x' - \xi}{B} \right) f(\xi) d\xi = \frac{1}{B} \left(\Pi \left(\frac{x'}{B} \right) * f(x') \right). \quad (1.307)$$

($\Pi(x)$ ist dabei die Rechtecksfunktion nach Definition (1.54).) Das Spektrum $\tilde{F}(\kappa)$ hiervon lautet

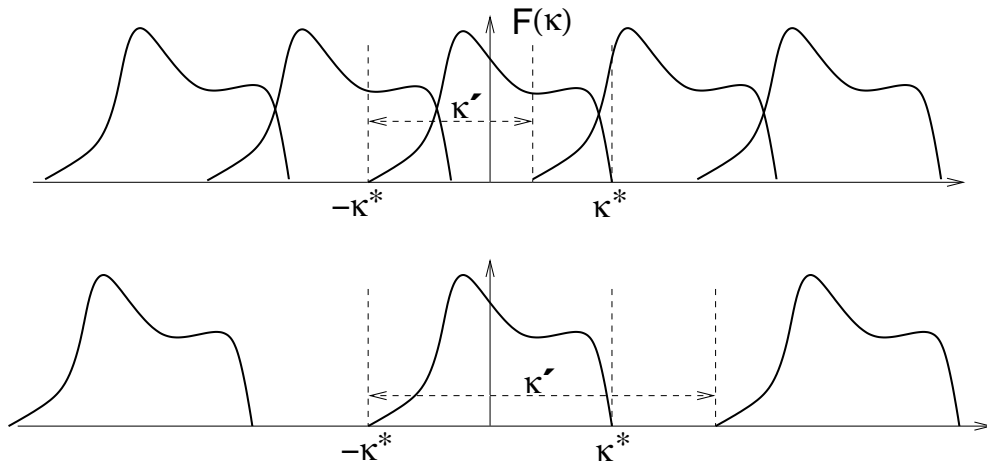


Abbildung 1.18: Schematische Darstellung von Spektren, wie sie sich aus der Abtastung bandbegrenzter Funktionen ergeben können: Das ursprüngliche Spektrum wiederholt sich periodisch. Bei zu geringer Abtastrate überlappen sich diese Einzelspektren (oben); die abgetastete Funktion kann dann nicht mehr störungsfrei rekonstruiert werden.

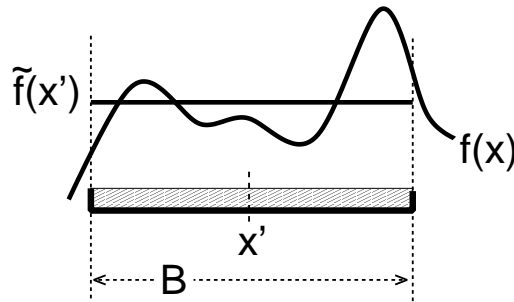


Abbildung 1.19: Messung einer Funktion $f(x)$ am Ort x' mit einem Detektor endlicher Breite B . Dies bedeutet (bei homogener Detektorempfindlichkeit) eine Mittelung über diesen Bereich.

(vgl. Gl. (1.55)):

$$\tilde{f}(\kappa) \circ \bullet \tilde{F}(\kappa) = \frac{1}{B} \frac{\sin(\pi\kappa B)}{\pi\kappa} F(\kappa) = \text{sinc}(B\kappa)F(\kappa), \quad (1.308)$$

d.h. für hohe Frequenzen gilt

$$\tilde{F}(\kappa) \sim \frac{1}{\kappa} F(\kappa). \quad (1.309)$$

Eine Messung mit einem Detektor endlicher Ausdehnung wirkt also als Tiefpass.

Generell gibt es für jeden Detektor eine typische Charakteristik der Empfindlichkeit, die sog. *Ansprechfunktion*; im obigen Beispiel wurde diese als konstant angenommen (woraus sich die Mittelwertbildung ergab). Aus der Vorstellung, wie sich ein einzelner „Punkt“ auf diese Weise abgebildet, wird unmittelbar klar, dass es sich bei der Ansprechfunktion um die Punktspreizfunktion (psf) handelt. Die Vermessung einer kontinuierlichen Funktion $f(x)$ führt also auf die Messwerte $(f * \text{psf})(x)$.

Häufig liegen identische Detektoren in einem Array angeordnet vor; die Messorte sind also diskret und periodisch. Bei einem Wiederholabstand λ der Detektorelemente im Array kann das Messergebnis \tilde{f} dann elegant formuliert werden als:

$$\tilde{f}(x) = (f * \text{psf})(x) \cdot \frac{1}{\lambda} \text{III}(x/\lambda), \quad (1.310)$$

(vgl. Gl. (1.80)). Davon lässt sich sofort die Fourier–Transformation erhalten (mit $f \circ \bullet F$):

$$\tilde{f}(x) \circ \bullet \tilde{F}(\kappa) = (F(\kappa) \cdot \text{MTF}(\kappa)) * \text{III}(\lambda\kappa). \quad (1.311)$$

Dieser Ausdruck ist analog zu Gl. (1.306), nur ist es hier das Produkt $(F \cdot \text{MTF})$, das sich periodisch im Spektrum wiederholt.

1.7 Invertierung von Faltungsoperationen

Die Invertierung von Faltungsoperationen stellt ein relevantes Problem dar: Typischerweise sind z.B. Messdaten mit einer Punktspreizfunktion gefaltet (Kap. 1.6.1); wenn die Punktspreizfunktion bekannt ist, dann sollten doch auch die ursprünglichen Daten ermittelbar sein. Mathematischer ausgedrückt lautet das Problem also:

$$g = k * f, \quad (\text{mit } g \text{ und Kern } k \text{ bekannt, gesucht: } f). \quad (1.312)$$

1.7.1 Fourier–Invertierung

Der Lösungsweg hier ist zunächst offensichtlich:

$$g = k * f \circ \bullet G = K \cdot F, \quad (\text{mit } \{g, f, k\} \circ \bullet \{G, F, K\}) \quad (1.313)$$

woraus sofort folgt:

Methode 0 (Die „Unbekümmerte“):

$$F = \frac{1}{K} \cdot G \bullet \circ f. \quad (1.314)$$

Theoretisch ist dies durchaus korrekt; wenn g tatsächlich nur aus dem Faltungsprodukt besteht, dann ist der Term G/K unproblematisch, da dann mit $|\kappa| \rightarrow \infty$ die Funktion G schneller als K gegen Null geht. Ist allerdings g mit einem Rauschen (Messfehler) überlagert, dann findet sich ein Rauschanteil auch in G , und dieser verschwindet eben nicht notwendigerweise hinreichend schnell. Der Term G/K ist dann praktisch nicht mehr zu gebrauchen. Dennoch können von obigem Ansatz Näherungsverfahren abgeleitet werden [21]:

Methode 1 (Verfahren mit Differenzialoperator): Der Term $1/K$ wird Taylor–entwickelt:

$$\frac{1}{K} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \kappa^n; \quad b_n =: a_n (2\pi\iota)^n; \quad (1.315)$$

Gl. (1.314) lautet dann (unter Verwendung von Gl. (1.9)):

$$F(\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2\pi\iota)^n \kappa^n G(\kappa) \bullet \circ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dx^n} g(x). \quad (1.316)$$

Es gibt also einen linearen Differentialoperator \mathcal{L} (mit konstanten Koeffizienten), mit dem die Faltungsinversion dann formuliert werden kann als:

$$f = \mathcal{L}g, \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dx^n}. \quad (1.317)$$

Formal handelt es sich hierbei um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung, für die sozusagen die Lösung bekannt, aber das Problem (der Differentialoperator \mathcal{L}) gesucht ist.⁸

Damit \mathcal{L} anwendbar ist, muss g zumindest hinreichend oft differenzierbar sein. Messdaten sind also geeignet aufzubereiten, z.B. durch eine „glatte“ Kurve zu interpolieren. Höhere Ableitungen könnten dann aber zunehmend problematisch sein.

Methode 2 (Verfahren mit inversen Faltungskern): Ausgehend von Gl. (1.314) kann die Rechnung noch einen eigentlich naheliegenden Schritt weitergeführt werden:

$$F = \frac{1}{K} \cdot G \quad \bullet \text{---} \circ \quad \overset{\leftarrow}{k} * g = f, \quad \left(\text{mit} \quad \overset{\leftarrow}{k} \circ \text{---} \bullet \frac{1}{K} \right). \quad (1.318)$$

Es wird also davon ausgegangen, dass ein entsprechender inverser Faltungskern $\overset{\leftarrow}{k}$ existiert. Für einen inversen Faltungskern gilt stets:

$$K \cdot \frac{1}{K} = 1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad k * \overset{\leftarrow}{k} = \delta \quad \text{bzw., da ja:} \quad f * k * \overset{\leftarrow}{k} = f. \quad (1.319)$$

Der inverse Kern $\overset{\leftarrow}{k}$ folgt hier aus einer kurzen Rechnung (nach [21]); der bisherige Ansatz liefert:

$$\begin{aligned} g &= k * f; \quad f = \mathcal{L}g; \\ \implies f &= \mathcal{L}(k * f) = \mathcal{L}k * f; \quad (\text{wegen Ableitungsregel Gl. (1.29)}) \\ \implies \mathcal{L}k &= \delta \implies \mathcal{L}^2 k = \mathcal{L}\delta; \end{aligned} \quad (1.320)$$

dann ergibt sich der inverse Kern aus:

$$\begin{aligned} \overset{\leftarrow}{k} * g &= f = \mathcal{L}g = \mathcal{L}(\delta * g) = \mathcal{L}\delta * g = \mathcal{L}^2 k * g; \\ \implies \overset{\leftarrow}{k} &= \mathcal{L}^2 k. \end{aligned} \quad (1.321)$$

Gegenüber der ersten Methode hat dies den Vorteil, dass der Differentialoperator nun auf den Faltungskern wirkt. Bei einem numerischen Kern muss der Aufwand des „glatte Interpolierens“, etc., also nur einmalig durchgeführt werden, oder aber der Kern ist in analytischer Form gegeben, dann sind die Ableitungen ohnehin leicht zu erhalten.

Berechnung der Koeffizienten: Unabhängig von der Methode werden in jedem Fall die in Gl. (1.315) auftretenden Entwicklungskoeffizienten benötigt. Dazu berechnet man zuerst die Entwicklungskoeffizienten \tilde{b}_n der Fourier-Transformierten des Kerns:

$$K = \sum_n \tilde{b}_n \kappa^n = \int k(x) e^{-2\pi i \kappa x} dx; \quad (1.322)$$

⁸Bzgl. der Differentialgleichung spielt der Kern k die Rolle einer Greensfunktion.

die Koeffizienten \tilde{b} besitzen so das Fourier-Integral als charakteristische Funktion (vgl. Kap. 1.5.2), da für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{d\kappa^m} K &= \sum_n \tilde{b}_{n+m} \frac{(n+m)!}{n!} \kappa^n = \int k(x) (-2\pi i x)^m e^{-2\pi i \kappa x} dx \\ \text{bei } \kappa = 0 &\implies \tilde{b}_m m! = (-2\pi i)^m \int k(x) x^m dx. \end{aligned} \quad (1.323)$$

Wird $k(x)$ als normierte Verteilung aufgefasst, dann kann man schreiben:

$$\int k(x) x^m dx = \langle x^m \rangle \quad \text{und} \quad \int k(x) dx = \langle x^0 \rangle = 1. \quad (1.324)$$

Die Koeffizienten von K berechnen sich also über die Momente von k . Voraussetzung ist freilich, dass die Momente $\langle x^m \rangle$ überhaupt existieren. Bei der Lorentzfunktion (Kap. 1.2.7) ist dies z.B. *nicht* der Fall. (Deren Fourier-Transformierte lässt sich eben auch nicht um $\kappa = 0$ entwickeln ...)

Im Folgenden sollen nur gerade Kerne (d.h. $k(x) = k(-x)$) betrachtet werden. Dann sind $K(\kappa)$ und $1/K(\kappa)$ ebenfalls gerade. Folglich treten stets nur Koeffizienten mit geradzahligem Index auf und man erhält als schönes allgemeines Ergebnis:

$$\tilde{b}_m = (-1)^{m/2} \frac{(2\pi)^m}{m!} \langle x^m \rangle. \quad (1.325)$$

Gesucht sind aber eigentlich die Koeffizienten b_m der inversen Funktion $1/K$; es gilt der Zusammenhang $(\sum_n b_n \kappa^n)(\sum_m \tilde{b}_m \kappa^m) = 1$, also:

$$\begin{aligned} b_0 &= +1/\tilde{b}_0; \\ b_2 &= -\tilde{b}_2; \\ b_4 &= +\tilde{b}_2^2 - \tilde{b}_4; \\ b_6 &= -\tilde{b}_2^3 + 2\tilde{b}_2\tilde{b}_4 - \tilde{b}_6; \\ b_8 &= +\tilde{b}_2^4 - 3\tilde{b}_2^2\tilde{b}_4 + 2\tilde{b}_2\tilde{b}_6 + \tilde{b}_4^2 - \tilde{b}_8; \\ &\vdots \end{aligned}$$

So findet man schließlich (mit $a_n = b_n/(2\pi i)^n$) für die ersten Koeffizienten des Differenzialoperators \mathcal{L} (Gl. (1.317)):

$$\begin{aligned} a_0 &= +1; \\ a_2 &= -\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle; \\ a_4 &= +\frac{1}{4} \langle x^2 \rangle^2 - \frac{1}{4!} \langle x^4 \rangle; \\ a_6 &= -\frac{1}{8} \langle x^2 \rangle^3 + \frac{1}{4!} \langle x^2 \rangle \langle x^4 \rangle - \frac{1}{6!} \langle x^6 \rangle; \\ a_8 &= +\frac{1}{16} \langle x^2 \rangle^4 - \frac{1}{32} \langle x^2 \rangle^2 \langle x^4 \rangle + \frac{1}{6!} \langle x^2 \rangle \langle x^6 \rangle + \frac{1}{(4!)^2} \langle x^4 \rangle^2 - \frac{1}{8!} \langle x^8 \rangle; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ergebnis: Berücksichtigt man bei Methode 1 wegen der beschriebenen Problematik bei höheren Ableitung nur die zweite Ableitung, ergibt sich als Näherung:

$$f(x) \approx \left(1 - \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \frac{d^2}{dx^2}\right) g(x). \quad (1.326)$$

Bei Methode 2 können problemlos höhere Ableitungen verwendet werden; geht man bis zur Ordnung $2N$, findet man für den gesuchten inversen Kern:

$$\overleftarrow{k}(x) = \mathcal{L}^2 k = \left(\sum_n a_n \frac{d^n}{dx^n}\right)^2 k(x) = \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=0}^n a_{2m} a_{2(n-m)}\right) \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} k(x). \quad (1.327)$$

In Kap. 5 ist dies am Beispiel einer Gaussfunktion gezeigt.

1.7.2 Iterativer Ansatz

Um die Gl. (1.312) nach f zu lösen, kann auch ein iterativer Ansatz [22] gewählt werden. Hier sind nur „vorwärts“-Faltungen auszuführen, was gegenüber einer Faltungsinversion deutlich unproblematischer erscheint.

Die gefaltete und die ungefaltete Funktion sollten eine gewisse Ähnlichkeit besitzen; als nullte Näherung für f bietet sich also an:

$$f_0 = g; \quad (1.328)$$

aus der Näherung für f resultiert eine Näherung für g („vorwärts“-Faltung):

$$g_n = k * f_n; \quad (1.329)$$

eine Korrektur der Näherungen f_n erfolgt über die Abweichung der g_n von g :

$$f_{n+1} - f_n = g - g_n. \quad (1.330)$$

Insgesamt erhält man schließlich als Iterationsvorschrift:

$$f_{n+1} = g + f_n - k * f_n. \quad (1.331)$$

Typischerweise wird ein solcher Algorithmus rein numerisch weiterverarbeitet. Dies ist aber nicht zwingend! Analytisch hingeschrieben lauten die ersten Iterationen:⁹

$$\begin{aligned} f_0 &= g; \\ f_1 &= 2g - k * g; \\ f_2 &= 3g - 3 \cdot k * g + k * k * g; \\ f_3 &= 4g - 6 \cdot k * g + 4 \cdot k * k * g - k * k * k * g. \end{aligned} \quad (1.332)$$

⁹In der analogen sowie in der digitalen Bildbearbeitung gibt es die Technik „unscharf Maskieren“ als Methode zur Kantenanhebung/Nachschärfung. Konzeptionell entspricht dies hier der ersten Iteration.

Um die auftretenden Mehrfachfaltungen vereinfacht bezeichnen zu können, soll hier (wie schon in Kap. 1.5.6) die folgende Schreibweise verwendet werden:

$$k^{*n} := \underbrace{k * k * \cdots * k}_{n\text{-mal}} = \underbrace{k * k * \cdots * k}_{n\text{-mal}} * \delta; \quad (1.333)$$

insbesondere: $k^{*0} = \delta$; $k^{*1} = k$; $k^{*(-1)} = \overleftarrow{k}$.

Ein Blick auf die in Gln. (1.332) auftretenden Koeffizienten lässt den Verdacht aufkommen, dass es sich dabei um Binomialkoeffizienten handelt, sich also schreiben lässt:

$$f_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+1}{m+1} k^{*m} * g. \quad (1.334)$$

Hat man erst einmal diese – korrekte – Vermutung, dann ist der Beweis durch Induktion (Einsetzen in Gl. (1.331) und prüfen auf Konsistenz) trivial. Gl. (1.334) könnte in der numerischen Auswertung u.U. Vorteile gegenüber der reinen Iteration nach Gl. (1.331) bieten, vor allem aber ergibt sich so nun doch wieder ein inverser Faltungskern:

$$\overleftarrow{k} := \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+1}{m+1} k^{*m}, \quad (1.335)$$

bzw. zumindest eine Approximation dafür, da für $(n \gg 1)$ Gl. (1.334) lautet:

$$f \approx f_n = \overleftarrow{k} * g. \quad (1.336)$$

Obwohl aus einer simplen Iteration stammend, ist dieser inverse Kern stets normiert:

$$\int \overleftarrow{k} dx = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+1}{m+1} = 1. \quad (1.337)$$

Interessant ist hier aber vor allem der übliche Test $\overleftarrow{k} * k \stackrel{?}{=} \delta$ (vgl. Gl. (1.319)):

$$\begin{aligned} \overleftarrow{k} * k &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+1}{m+1} k^{*(m+1)} = - \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{m} k^{*m} = \\ &= - \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{m} k^{*m} + \delta = \delta - (\delta - k)^{*(n+1)}. \end{aligned} \quad (1.338)$$

Für einen „perfekten“ inversen Kern sollte der Term $(\delta - k)^{*(n+1)}$ für $n \rightarrow \infty$ verschwinden. Gleiches gilt natürlich für dessen Fourier-Transformierte:

$$(\delta - k)^{*(n+1)} \stackrel{!}{=} 0 \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad (1 - K)^{n+1} \stackrel{!}{=} 0; \quad (1.339)$$

dies ist dann der Fall, wenn gilt:

$$|1 - K| < 1 \quad \text{bzw.} \quad 2 > K > 0. \quad (1.340)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, sich die grundsätzlichen Eigenschaften eines „normalen“ (d.h. normierten, symmetrischen, positiven) Faltungskerns zu verdeutlichen:

$$\int k \, dx = 1 \implies K(0) = 1; \tag{1.341}$$

$$k(x) = k(-x) \implies K(\kappa) = K(-\kappa); \tag{1.342}$$

$$k \geq 0 \implies \int k \, dx \geq \int k \cos(2\pi\kappa x) dx \iff K(0) \geq K(\kappa). \tag{1.343}$$

Es gilt also stets $K \leq 1$. Geht man nun davon aus, dass für einen Kern k auch $K > 0$ erfüllt ist, dann zeigt sich die durch den Iterationsalgorithmus erreichbare Verbesserung in der Fourier–Transformation (vgl. Gl. (1.338)), also:

$$\begin{aligned} \text{Situation vorher:} & \quad f * k \quad \circ \text{---} \bullet \quad F \cdot K; \\ \text{und nach } n \text{ Iterationen:} & \quad f * k * \overset{\leftarrow}{k} \quad \circ \text{---} \bullet \quad F \cdot (1 - (1 - K)^{n+1}). \end{aligned} \tag{1.344}$$

Stellt man sich die Multiplikation mit K vor wie die Anwendung eines gewichteten Fensters auf F , dann hat dieses Fenster sich nun geweitet (Abb. 1.20), und zwar um den Faktor $(1 - (1 - K)^{n+1})/K$. Für kleine Werte von K ist dieser Faktor maximal und beträgt:

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - K)^{n+1}}{K} = n + 1. \tag{1.345}$$

Bei sehr kleinen (z.B. exponentiell kleinen) Werten von K hat dieser Faktor (mit seiner typischerweise endlichen Größenordnung) also praktisch keine Wirkung. Insgesamt gesehen bekommt dieses Fenster die Form eines sich weitenden Rechtecks und folglich ähnelt dann $k * \overset{\leftarrow}{k}$ zunehmend einer entsprechenden sinc–Funktion.

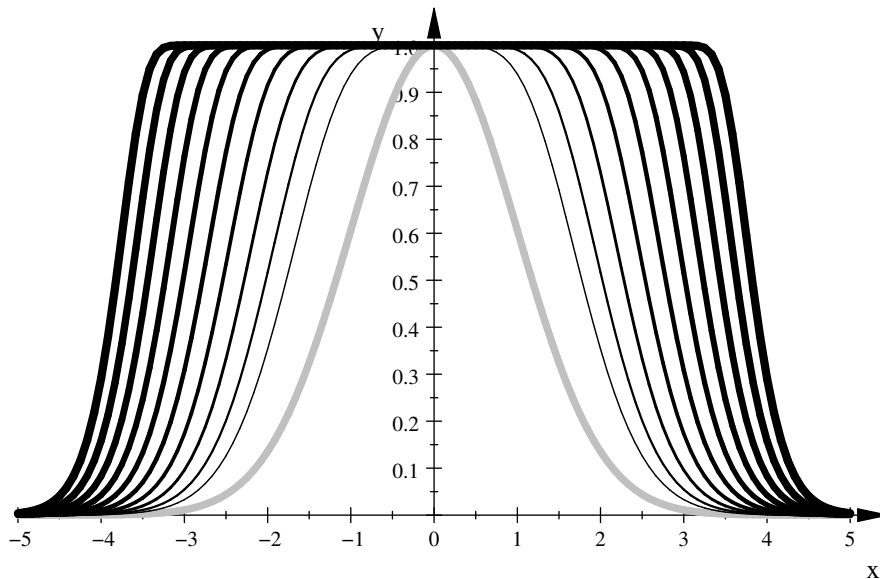


Abbildung 1.20: Öffnung des Fensters im Fourier–Raum am Beispiel eines Gauss–Kerns. Gezeigt sind die Funktionen K (grau) und $(1 - (1 - K)^{n+1})$ mit $n = 2^1, \dots, 2^{10}$ (zunehmend dick).

Um zu überprüfen, ob dieses Verfahren bei bestimmten Gegebenheiten konvergiert, kann man den Ausdruck $\int |g - g_n|^2 dx$ betrachten (vgl. [23]). Es sollte sein:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |g - g_n|^2 dx = 0. \tag{1.346}$$

Hier ist es einfacher, mit den Fourier-Transformierten zu rechnen; mit Gl. (1.23) gilt:

$$\int |g - g_n|^2 dx = \int |G - G_n|^2 d\kappa, \quad (1.347)$$

wobei

$$G_n = K \cdot F_n = K \cdot \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+1}{m+1} K^m \cdot G. \quad (1.348)$$

Insgesamt findet man so (nach analoger Rechnung zu Gl. (1.338)):

$$\int |g - g_n|^2 dx = \int |G \cdot (1 - K)^{n+1}|^2 d\kappa. \quad (1.349)$$

Für Konvergenz muss also gelten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |G \cdot (1 - K)^{n+1}|^2 d\kappa = 0. \quad (1.350)$$

1.7.3 Bewertung

Für alles, was praxisrelevant ist, muss also festgestellt werden, dass *perfekte* Rückfaltung eigentlich nicht möglich ist: Entweder müsste zu unendlich hohen Ordnungen gegangen werden (Methode 1,2) oder zu einer unendlich hohen Zahl von Iterationen. Der „Härtetest“ $\overset{\leftarrow}{k} * k \stackrel{?}{=} \delta$ fällt bei den endlichen Näherungen auch stets entsprechend ernüchternd aus. Die Methode 0 zeigt im Grunde schon das Problem in Reinform: Immer dann, wenn der Kern k klein wird oder Nullstellen hat, F aber nicht, dann geht die ursprüngliche Information verloren, bzw. im Rauschen unter.

Eine zufriedenstellende Rückfaltung kann aber durchaus erzielt werden, wenn diese kritische Situation erst gar nicht auftritt, d.h. wenn beispielsweise k keine Nullstellen besitzt und f mindestens ebenso bandbegrenzt ist wie k . Ein wichtiges Beispiel dafür ist in Kap. 5 beschrieben.

Kapitel 2

Physikalische Grundlagen der Dosimetrie

Selbstverständlich kann man hier bei einem solchen Thema nur an der Oberfläche bleiben. Für tiefergehendere und detailreichere Darstellungen gibt es zahlreiche gute und dicke Literatur (z.B. [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], ...).

2.1 Wechselwirkung von Photonen mit Materie

2.1.1 Schwächungskoeffizient und Streuquerschnitt

Durch die Wechselwirkung mit Materie wird einfallende Photonenstrahlung geschwächt. Diese Schwächung (in Einheiten von Teilchenanzahl) wird im Wesentlichen beschrieben durch ein exponentielles Schwächungsgesetz $N(x) = N_0 \text{Exp}(-\mu x)$ mit einem *linearen* Schwächungskoeffizienten μ (vgl. Gl. (1.253)). Die Schwächung ist ein Produkt voneinander unabhängiger Mechanismen, die jeweils mit einem eigenen Exponentialgesetz beschrieben werden, und deshalb setzt sich der Schwächungskoeffizient μ additiv zusammen aus den Schwächungskoeffizienten der einzelnen Wechselwirkungsprozesse:

$$\mu = \underbrace{\sigma_R}_{\text{Rayleigh-Effekt}} + \underbrace{\tau}_{\text{Photo-Effekt}} + \underbrace{\sigma}_{\text{Compton-Effekt}} + \underbrace{\kappa}_{\text{Paarbildung}} \quad (2.1)$$

Typischerweise wird der lineare Schwächungskoeffizient mit einer Dichte ρ_i normiert in der Form $\mu_i := \mu/\rho_i$, insbesondere:

$$\mu = \underbrace{\mu_m \cdot \rho}_{\text{Massendichte}} = \mu_a \cdot \underbrace{\frac{\rho \cdot N_A}{A}}_{\text{Atomdichte}} = \mu_e \cdot \underbrace{\frac{\rho \cdot N_A \cdot Z}{A}}_{\text{Elektronendichte}} \quad (2.2)$$

Wie üblich bezeichnet A die atomare Massenzahl und Z die Kernladungszahl. Die Avogadro-Konstante N_A beschreibt die Zahl der Nukleonen pro Masse. Damit entspricht $\rho \cdot N_A$ der Zahl der Nukleonen pro Volumen, d.h. der Nukleonendichte, wodurch obige Benennungen verständlich werden.

Wichtig ist vor allem der Massenschwächungskoeffizient μ_m , und zwar aus mindestens drei Gründen:

banal: für ganz unterschiedliche Materialien liegen die μ_m viel näher beieinander als die μ , weshalb sie sich z.B. in Graphiken besser gemeinsam darstellen lassen;

tiefgehend: μ_m zeigt den eigentlichen Unterschied von Materialien jenseits der offensichtlichen Veränderung von μ durch eine – zumindest gedachte – Variation der Dichte; (ohnehin gilt stets $\mu \sim \rho$);

substanziell: $\mu_m = \mu/\rho$ ist genau die Form, wie sie in den wesentlichen Formeln der Dosimetrie auftritt (vgl. Gl. (2.39)).

In der Dosimetrie werden zudem weitere – energienormierte – Schwächungskoeffizienten relevant (z.B. [24]):

$$\text{Energietransferkoeffizient: } \mu_{\text{tr}} := \mu \frac{\overline{E_{\text{tr}}}}{h\nu}; \quad (2.3)$$

$$\text{Energieabsorptionskoeffizient: } \mu_{\text{ab}} (= \mu_{\text{en}}) := \mu \frac{\overline{E_{\text{ab}}}}{h\nu}; \quad (2.4)$$

$\overline{E_{\text{tr}}}$ beschreibt die bei einer Wechselwirkung an Ladungsträger übertragene mittlere Energie, was davon aber tatsächlich im Material deponiert wird, ist die mittlere absorbierte Energie $\overline{E_{\text{ab}}}$ (vgl. Abb. 2.1). Den Unterschied macht der Energieverlust, der durch Bremsstrahlung entschwindet, und es gilt der Zusammenhang:

$$\mu_{\text{ab}} = (1 - g) \cdot \mu_{\text{tr}}; \quad (2.5)$$

der Faktor g (siehe Gl. (2.25)) repräsentiert den Bremsstrahlungsverlust, also den Bruchteil der Energie, der in Strahlung umgewandelt wird („radiative fraction“).

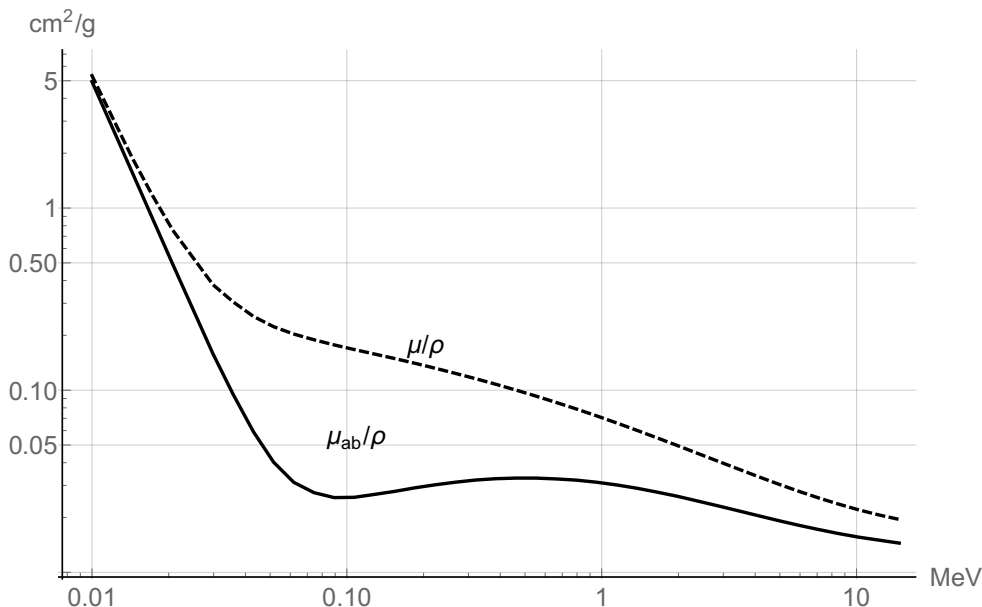


Abbildung 2.1: Massenschwächungskoeffizient und Massenenergieabsorptionskoeffizient für Wasser (nach [32]).

Totale **Streuquerschnitte** σ haben die Einheit einer Fläche, und deren Wert ist ein Maß für die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit. Sei $n=(\text{StreuzentrenAnzahl})/(\text{Volumen})$ die Anzahldichte von

Streuzentren in einem Volumen, dann entspricht ndx einer Flächendichte (d.h. einer Fläche aufgefasst als dünne Scheibe der Dicke dx). Das Produkt σndx ist direkt die Wahrscheinlichkeit für eine Wechselwirkung beim Durchtritt eines Teilchens durch diese dünne Schicht. Ein Teilchenstrahl aus N Teilchen wird so um dN Teilchen reduziert, und die zugehörige Bilanz lautet dann:¹

$$\frac{dN}{N} = -\sigma ndx; \quad (2.6)$$

dies ist natürlich eine altbekannte Gleichung mit der Lösung für endliche Dicken x :

$$N = N_0 e^{-\sigma nx}.$$

Damit ist offensichtlich: $\mu = \sigma n$, d.h. das Produkt aus Streuquerschnitt und Anzahldicke ergibt einen Schwächungskoeffizienten. Deshalb müssen umgekehrt μ_a und μ_e (vgl. Gl. (2.2)) als Atom- bzw. Elektronenstreuquerschnitt interpretiert werden.

Wie in Kap. 1.5.6 gezeigt, gilt für die mittlere freie Weglänge:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sigma n}.$$

2.1.2 Elementare Wechselwirkungsprozesse

Kohärente Streuung (Rayleigh–Streuung, „ σ_R “)

Die Vorstellung hier ist, dass ein einfallendes Photon ein gebundenes Elektron in Schwingungen versetzt, was wiederum zur Aussendung eines identischen Photons führt. Insgesamt findet also nur eine (kleine) Richtungsänderung und keinerlei Energieübertrag statt (Abb. 2.2). In der Strahlentherapie ist dieser Prozess deshalb ohne Bedeutung.

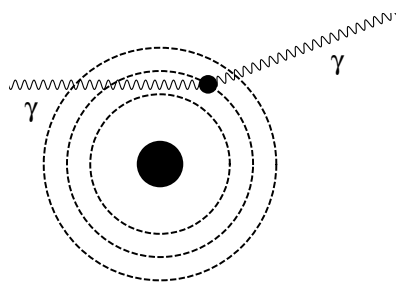


Abbildung 2.2: Rayleigh–Streuung – Symbolbild.

Photoeffekt („ τ “)

Beim Photoeffekt findet eine Wechselwirkung des Photons mit einem kernnahen Elektron statt. Die Photonenenergie wird dabei vollständig vom Elektron absorbiert, das dann die kinetische Energie

¹Dies gilt natürlich nur, wenn sich eine irgendwie geartete Schwächung in der Reduktion der Teilchenzahl ausdrückt (bei Erhaltung der Energie der Teilchen) – wie das bei Photonen der Fall ist. Im Gegensatz dazu funktioniert eine Schwächung von z.B. Elektronenstrahlung über die Abnahme deren kinetischer Energie – bei im Wesentlichen erhaltener Teilchenzahl.

$h\nu - E_B > 0$ (mit E_B : Bindungsenergie) besitzt und somit aus dem Atom gestossen wird. Sein freier Platz wird von energetisch höherliegenden Elektronen aufgefüllt, die dabei eine charakteristische Strahlung entsprechend der Niveauunterschiede aussenden. Diese charakteristische Strahlung kann in der Folge entweder das Atom verlassen, oder aber es kann ein „interner“ Photoeffekt stattfinden, was stattdessen weitere Elektronen aus dem Atom entfernt (Augereffekt, Augerelektronen), Abb. 2.3.

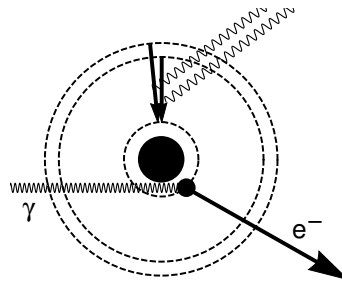


Abbildung 2.3: Photoeffekt – Symbolbild.

Da dafür eben $h\nu > E_B$ gelten muss, führt dies zu deutlichen Sprüngen in der Energieabhängigkeit des photoelektrischen Schwächungskoeffizienten – nämlich immer dann, wenn eine nächsthöhere Bindungsenergie erreicht wird (Abb. 2.4). Umgekehrt bedeutet das Auftreten dieser Kanten, dass der Photoeffekt dann am wahrscheinlichsten ist, wenn die Photonenenergie gleich oder geringfügig höher als eine Bindungsenergie ist. Bei Energien jenseits der Bindungsenergie des K-Elektrons nimmt der Effekt deutlich ab.

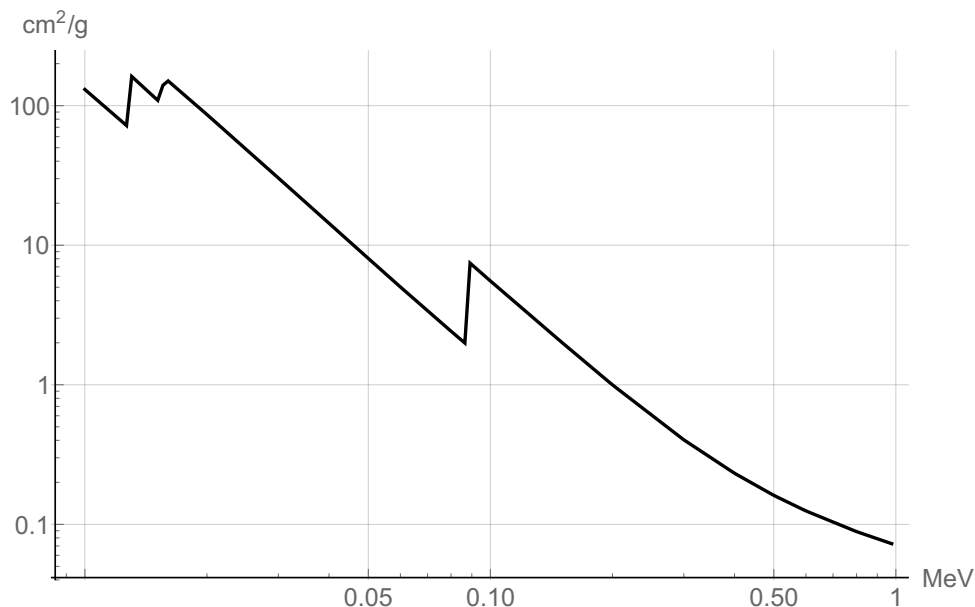


Abbildung 2.4: Massenschwächungskoeffizient für Blei (nach [32]) mit den Absorptionskanten L_3 , L_2 , L_1 und K (in Richtung zunehmender Energie).

Comptoneffekt „ σ “

Wie unten noch begründet wird, stellt der Comptoneffekt die dominierende Wechselwirkung in der Strahlentherapie dar, weshalb sich ein eingehender Blick darauf lohnt.

Der Comptoneffekt beschreibt die „Kollision“ eines Photons mit einem „quasifreien“ (d.h. $h\nu \gg E_B$, also „kernfern“) Elektron. Das Elektron wird dann emittiert, das Photon mit verminderter Energie gestreut (Abb. 2.5). Das übliche Vorgehen beim Comptoneffekt verwendet sogar die Annahme, dass die

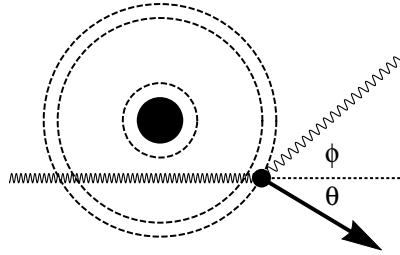


Abbildung 2.5: Comptoneffekt – Symbolbild.

Wechselwirkung mit einem vollkommen ungebundenen, ruhenden Elektron stattfindet. Deshalb sind die resultierenden Ausdrücke frei von materialabhängigen Größen wie Massenzahl und Kernladungszahl. Die Kinematik beschreibt die gegenseitige Abhängigkeit der Winkel und Energie; so gilt nach der Wechselwirkung:

$$\begin{aligned}
 \text{Streuwinkel des Photons:} & \quad \phi \\
 \text{Energie des gestreuten Photons (Abb. 2.6):} & \quad h\nu' = h\nu_0 \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \phi)} \\
 \text{Streuwinkel des emittierten Elektrons (Abb. 2.7):} & \quad \cot \theta = (1 + \alpha) \tan(\phi/2) \\
 \text{kinetische Energie des emittierten Elektrons (Abb. 2.6):} & \quad T = h\nu_0 \frac{\alpha(1 - \cos \phi)}{1 + \alpha(1 - \cos \phi)}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dabei bezeichnet α die Eingangspotonenenergie in Einheiten der Elektronenruheenergie: $\alpha := (h\nu_0)/(m_e c^2)$. Bei einem „zentralen Stoß“ des Photons ($\phi = 180^\circ$, $\theta = 0^\circ$) wird die jeweils maximal mögliche Energie an das Elektron übertragen:

$$T_{\max} = h\nu_0 \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}. \tag{2.8}$$

Abb. 2.7 illustriert die Beziehung der Streuwinkel von Elektron und Photon. Mit zunehmender Photonenenergie zeigt sich bei kleinen Streuwinkeln des Photons eine große Variabilität des Elektronenstreuwinkels – und umgekehrt. Tatsächlich sind in diesem Fall beide Streuwinkel klein. Diese Erkenntnis kommt aber nicht aus der Kinematik, sondern aus dem Streuquerschnitt, der Wahrscheinlichkeiten für konkrete Werte liefert: Der **Klein–Nishima–Streuquerschnitt** ${}_e\sigma$ für den Comptoneffekt beruht auf den o.g. Annahmen (Elektron ungebunden und stationär). Der differentielle Streuquerschnitt für den Photonenstreuwinkel ϕ lautet (z.B. [27]):

$$\frac{d_e\sigma}{d\Omega_\phi} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu_0} \right)^2 \left(\frac{h\nu_0}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu_0} - \sin^2 \phi \right). \tag{2.9}$$

Dabei bezeichnet $r_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = \mu_0 e^2/(4\pi m_e) = (e^2/m_e)10^{-7} \approx 2.81810^{-15}\text{m}$ den „klassischen Elektronenradius“. $d\Omega_\phi$ ist ein Raumwinkelelement, die Integration über alle Richtungen lautet:

$$\int^{4\pi} f(\phi) d\Omega_\phi = 2\pi \int_0^\pi f(\phi) \sin \phi d\phi.$$

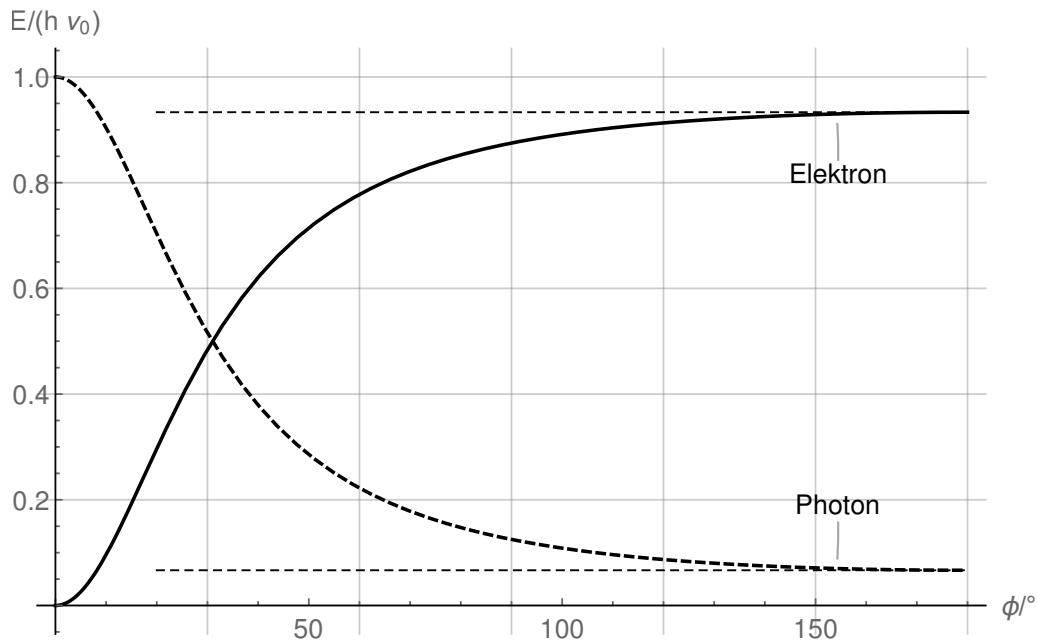


Abbildung 2.6: Comptoneffekt: Energie des gestreuten Elektrons und Photons in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϕ des Photons (mit $\alpha = 7$, ca. 3.5 MeV). Die Maximalenergie des Elektrons wird bei $\phi = 180^\circ$ erreicht.

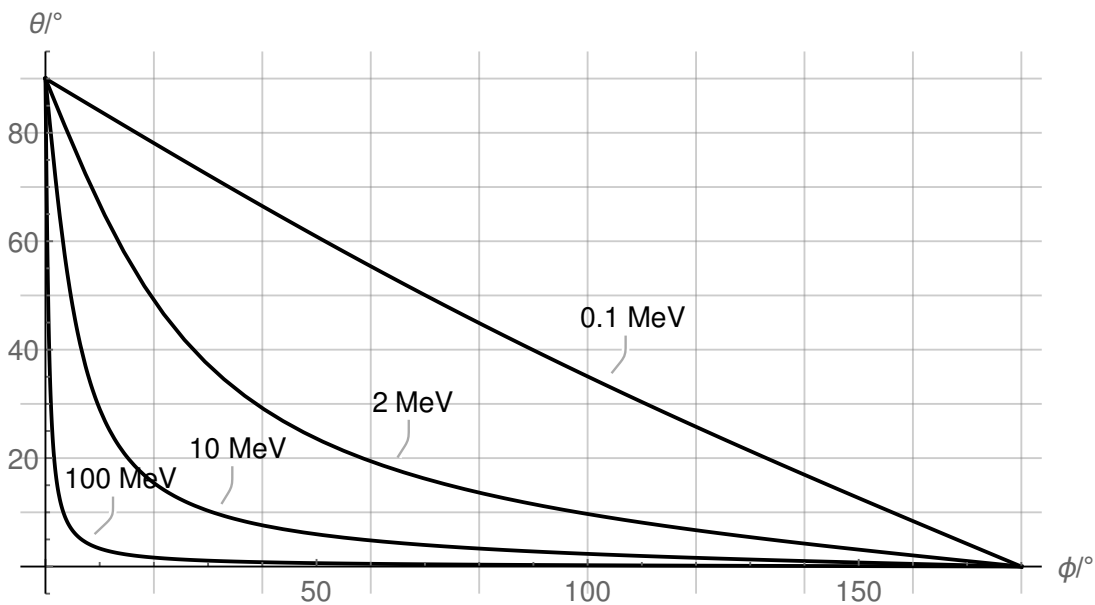


Abbildung 2.7: Comptoneffekt: Winkel θ des gestreuten Elektrons in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϕ des Photons.

In Abb. 2.8 ist Gl. (2.9) für verschiedene Photonenenergien dargestellt. Wie sich zeigt, werden mit zunehmender Energie kleine Photonenstreuwinkel wahrscheinlicher. Noch offensichtlicher wird das durch die Darstellung der Winkelverteilung in Polarkoordinaten, Abb.2.9.

Wird Gl. (2.9) über alle Raumwinkel in der beschriebenen Weise aufintegriert, erhält man den *totalen* Streuquerschnitt:

$$e\sigma = 2\pi \int_0^\pi \frac{d_e\sigma}{d\Omega_\phi} \sin\phi \, d\phi = \frac{\pi r_0^2}{\alpha^3} \left(\frac{2\alpha(\alpha(\alpha+1)(\alpha+8)+2)}{(2\alpha+1)^2} + ((\alpha-2)\alpha-2) \ln(2\alpha+1) \right) \quad (2.10)$$

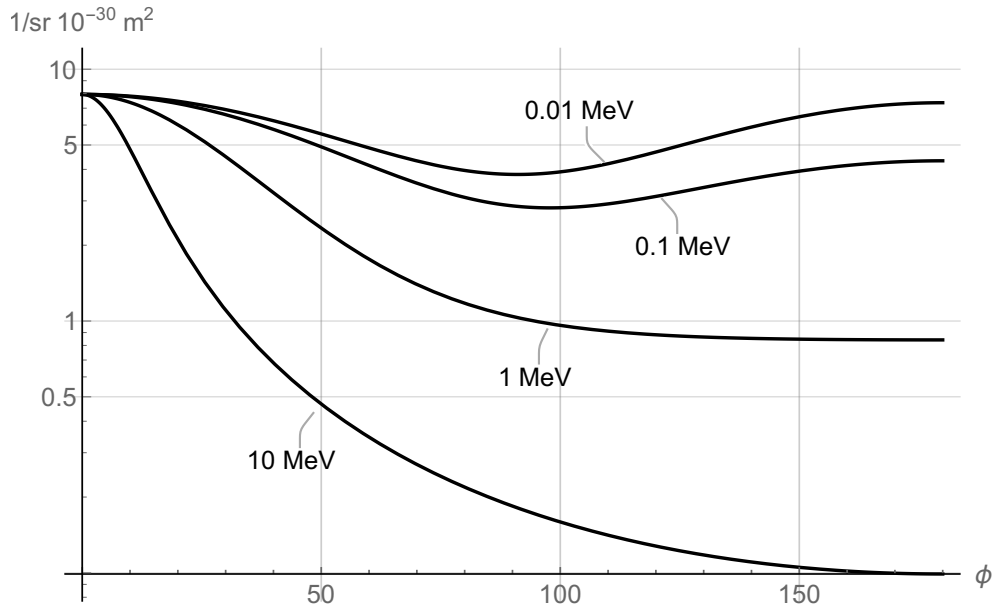


Abbildung 2.8: Differentieller Streuquerschnitt in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϕ des Photons.

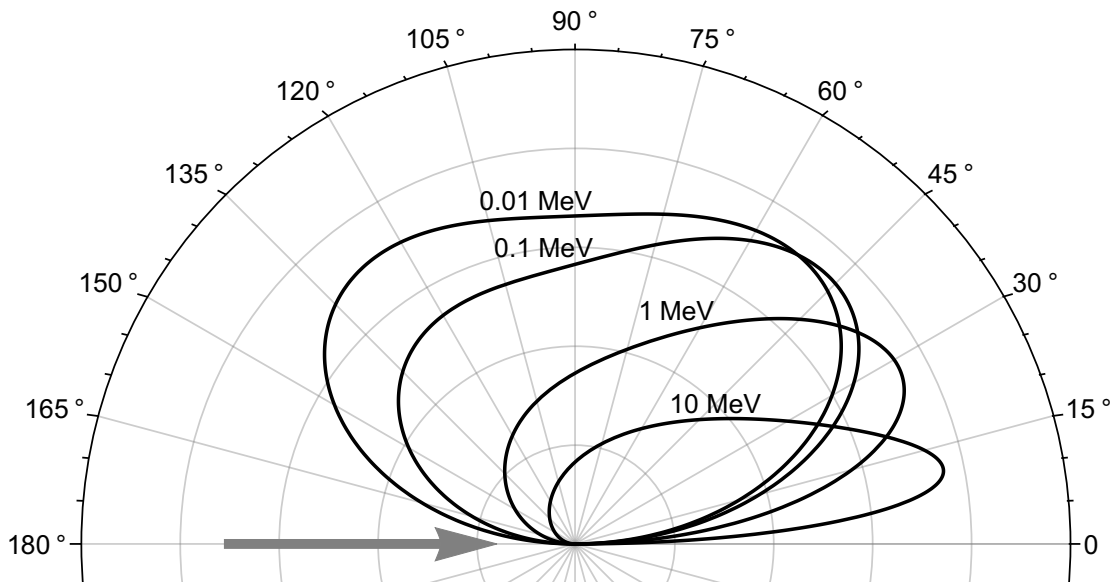


Abbildung 2.9: Relative Wahrscheinlichkeiten der Streurichtung des Photons. (Der graue Pfeil symbolisiert die Einstrahlrichtung.)

Der totale Streuquerschnitt ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung in Abhängigkeit von der Energie.

In der gleichen Weise läßt sich die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten *mittleren* Energieübertrag auf das Elektron berechnen, indem man für den *totalen Energie-Transfer-Streuquerschnitt* ansetzt:

$$\begin{aligned}
 {}_e\sigma_{\text{tr}} &= 2\pi \int_0^\pi \frac{d_e\sigma}{d\Omega_\phi} \frac{T}{h\nu_0} \sin\phi \, d\phi = \\
 &= \frac{\pi r_0^2}{3\alpha^3} \left(3(\alpha - 3)(\alpha + 1) \ln(2\alpha + 1) - \frac{2\alpha(\alpha(\alpha(\alpha(10\alpha - 51) - 93) - 51) - 9)}{(2\alpha + 1)^3} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

${}_e\sigma$ und ${}_e\sigma_{\text{tr}}$ sind in Abb. 2.10 in Abhängigkeit von der Energie aufgetragen.

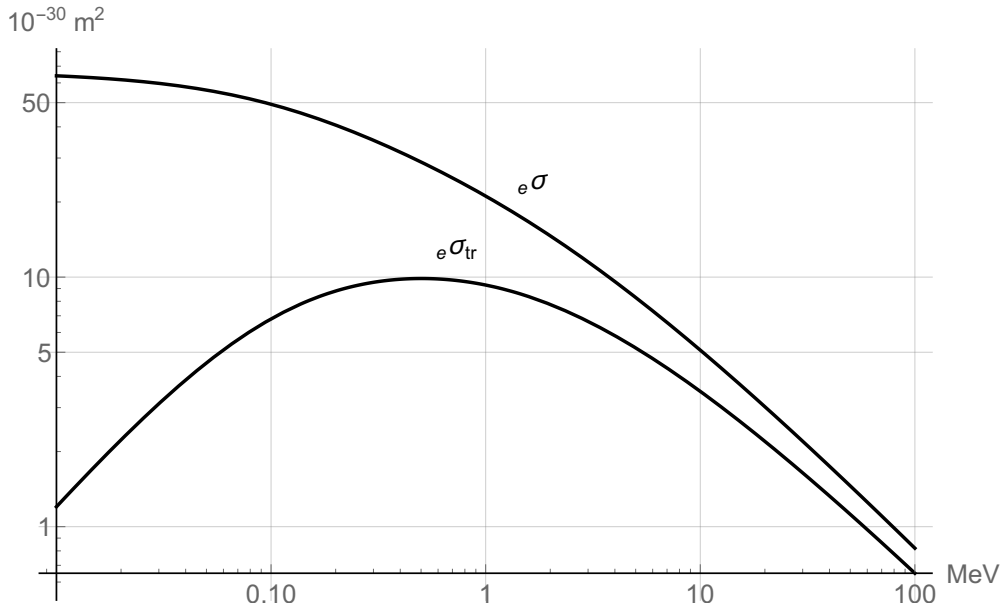


Abbildung 2.10: Totaler Streuquerschnitt und totaler Energie-Transfer-Streuquerschnitt in Abhängigkeit von der Photonenenergie.

Werden diese (Elektronen(!)-)Streuquerschnitte mit der Elektronendichte multipliziert (vgl. Gl. (2.2)), ergeben sich die Compton-Anteile an den Schwächungskoeffizienten μ und μ_{tr} (vgl. Gl. (2.3)):

$$\sigma = {}_e\sigma \cdot \rho \frac{N_A Z}{A} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{tr} = {}_e\sigma_{tr} \cdot \rho \frac{N_A Z}{A} \quad (2.12)$$

Wenn als normierte Wahrscheinlichkeit $p = (1/{}_e\sigma)(d{}_e\sigma/d\Omega_\phi)$ (für den Compton-Fall) genommen wird, dann hätte man für obige Rechnung ebensogut ansetzen können:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{{}_e\sigma} \int \frac{d{}_e\sigma}{d\Omega_\phi} T d\Omega_\phi = h\nu_0 \frac{{}_e\sigma_{tr}}{{}_e\sigma} = \overline{E_{tr}}. \quad (2.13)$$

Das Verhältnis ${}_e\sigma_{tr}/{}_e\sigma$ beschreibt jedenfalls den Anteil der primären Photonenenergie $h\nu_0$, der als mittlere Energie an ein Comptonelektron übertragen wird. In Abb. 2.11 ist die Abhängigkeit von der Energie gezeigt, und dazu im Vergleich die Maximalenergie (vgl. Gl (2.8)).

Eine weitere wichtige Größe ist der differentielle Streuquerschnitt in Abhängigkeit vom Elektronenstreuwinkel θ . Mit Gl. (2.7) und

$$\frac{d{}_e\sigma}{d\Omega_\phi} = \frac{d{}_e\sigma}{d\phi} \frac{1}{2\pi \sin \phi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d{}_e\sigma}{d\Omega_\theta} = \frac{d{}_e\sigma}{d\theta} \frac{1}{2\pi \sin \theta}$$

folgt:

$$\frac{d{}_e\sigma}{d\Omega_\theta} = \left[\frac{d{}_e\sigma}{d\Omega_\phi} \sin \phi \right]_{\phi=\phi(\theta)} \cdot \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta}. \quad (2.14)$$

Dies ist dargestellt in Abb. 2.12; auch hier zeigt sich, dass mit zunehmender Energie kleine Streuwinkel deutlich wahrscheinlicher werden. Noch eindrücklicher stellt sich das im Polardiagramm dar, Abb. 2.13.

Schließlich ist noch die Abhängigkeit des differentiellen Streuquerschnitts von der kinetischen Energie der Elektronen interessant. Dies stellt das Energiespektrum der Elektronen *am Ort der Wechselwir-*

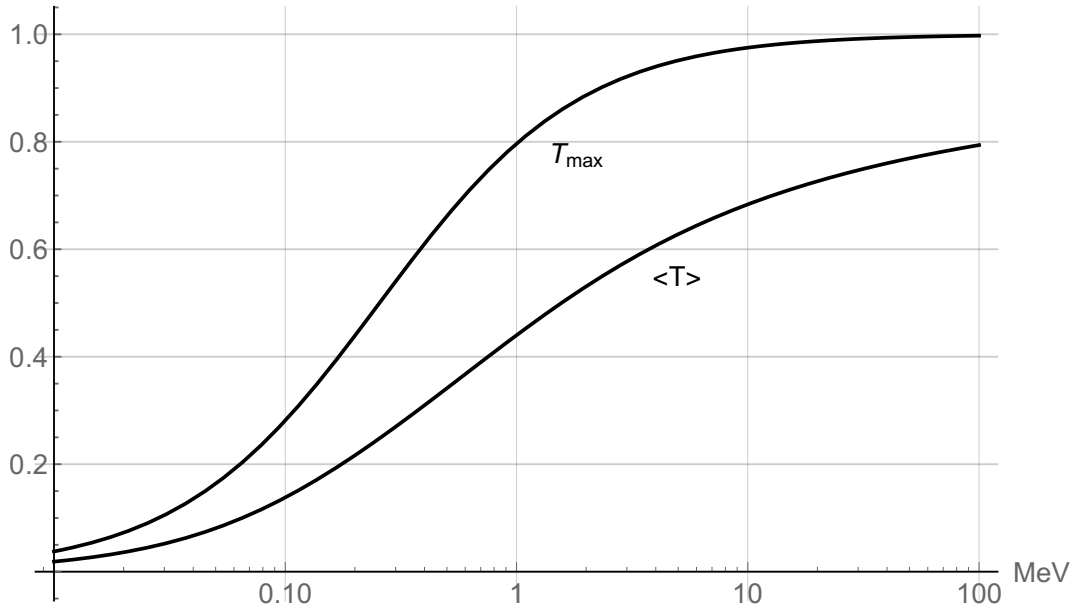


Abbildung 2.11: Energieabhängigkeit von mittlerer kinetischer Energie $\langle T \rangle$ und maximal möglicher kinetischer Energie T_{\max} von Comptonelektronen (in Einheiten der primären Photonenenergie $h\nu_0$).

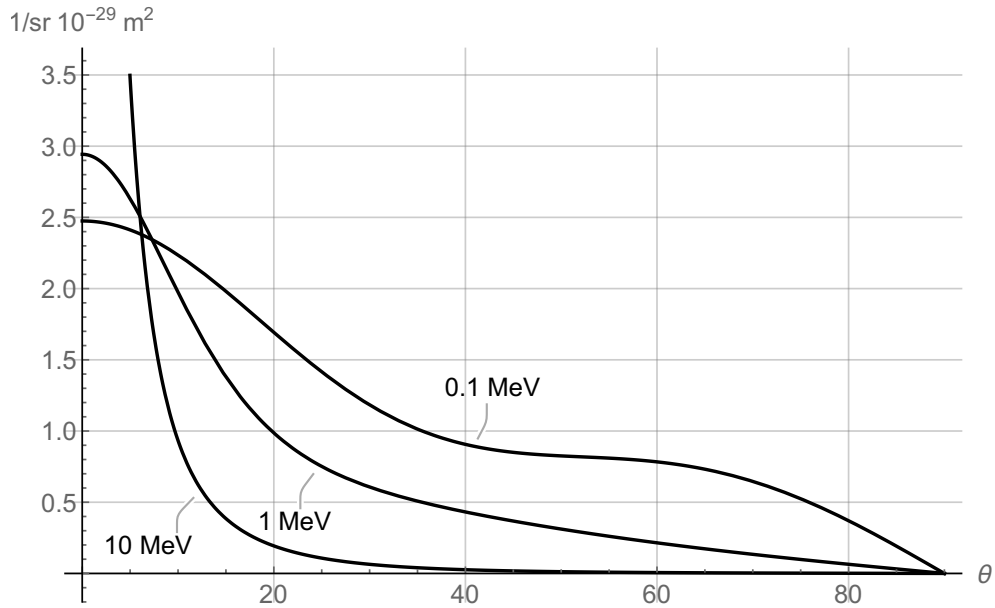


Abbildung 2.12: Differentieller Streuquerschnitt in Abhängigkeit vom Streuwinkel θ des Elektrons.

kung dar. Aus Gl. (2.7) folgt:

$$\frac{h\nu'}{h\nu_0} = \frac{h\nu_0 - T}{h\nu_0} \quad \text{und} \quad \phi(T) = \arccos\left(1 - \frac{T}{\alpha(h\nu_0 - T)}\right); \quad (2.15)$$

damit läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d_e\sigma}{dT} &= \left[\frac{d_e\sigma}{d\Omega_\phi} \cdot 2\pi \sin\phi \right]_{\phi=\phi(T)} \cdot \frac{d\phi}{dT} = \\ &= \frac{\pi m_e c^2 r_0^2 (m_e^2 c^4 T^2 + 2hm_e c^2 \nu_0 T (T - h\nu_0) + h\nu_0 (2h^3 \nu_0^3 - 4h^2 \nu_0^2 T + 3h\nu_0 T^2 - T^3))}{h^4 \nu_0^4 (h\nu_0 - T)^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

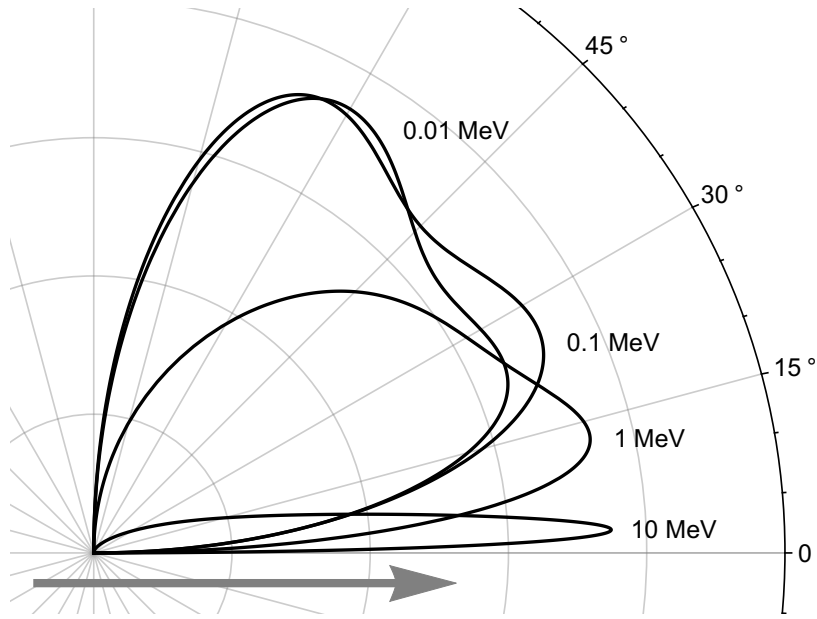


Abbildung 2.13: Relative Wahrscheinlichkeiten der Streurichtung des Elektrons. (Der graue Pfeil symbolisiert die Einstrahlrichtung.)

In Abb. 2.14 ist der Zusammenhang für verschiedene Photonenenergien dargestellt. Die Energieverteilung der Comptonelektronen endet immer bei T_{\max} (Gl. (2.8)), wo mit steigender Energie eine Konzentration stattfindet. Dies ist konsistent mit der obigen Feststellung der zunehmenden Vorwärtsstreuung.

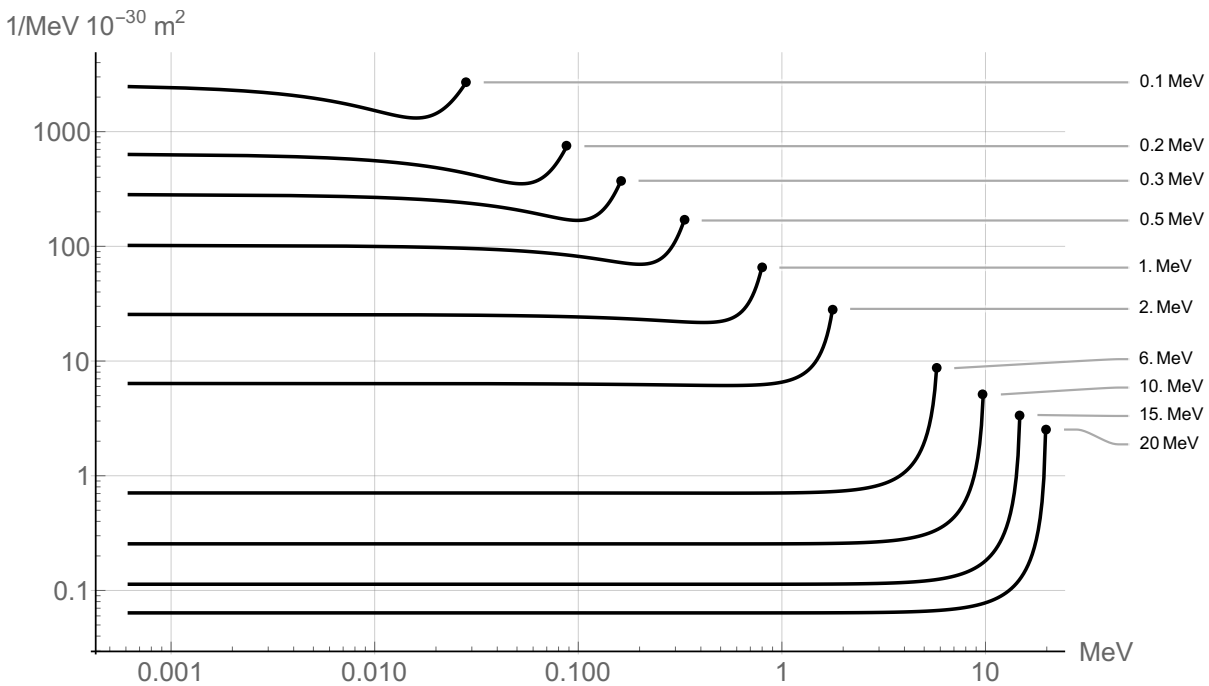


Abbildung 2.14: Differentieller Streuquerschnitt in Abhängigkeit von der Energie der Comptonelektronen. Dies entspricht dem Energiespektrum am Ort der Wechselwirkung. Die bezeichneten Werte beziehen sich auf die Energie der primären Photonen.

Paarbildungseffekt („ κ “)

Hier wechselwirkt das Photon mit dem Atomkern und wird dabei absorbiert. In der Folge entsteht ein Elektron–Positron–Paar mit der Summenenergie $E(e^-) + E(e^+) = h\nu_0 - 2m_e c^2$. Dabei müssen die Einzelenergien nicht gleich sein. Die Wechselwirkungen des Positrons mit seiner Umgebung sind die gleichen wie beim Elektron (d.h. Ionisierung, Anregung, Bremsstrahlung), es verliert also ebenso seine Bewegungsenergie und rekombiniert schließlich mit einem Elektron in Form zweier Photonen (mit je $h\nu = m_e c^2$), die sich in Gegenrichtung auseinanderbewegen (Abb. 2.15).

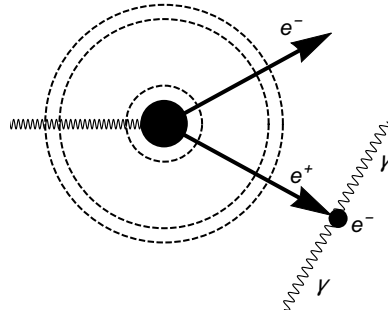


Abbildung 2.15: Paarbildungseffekt – Symbolbild.

Gesamtschau der Wechselwirkungen

Die oben genannten sind die hauptsächlichen, aber nicht die einzigen Wechselwirkungen; daneben gibt es z.B. noch die Triplettbildung und den Kernphotoeffekt. Es hängt sehr von der verwendeten Photonenenergie ab, wie stark gewichtet die oben genannten Wechselwirkungen zum Tragen kommen; die folgende Tabelle (nach [24]) zeigt die energieabhängigen Gewichtungen für Wasser:

Photonenenergie [MeV]	Photoeffekt	Comptoneffekt	Paarbildungseffekt
	τ [%]	σ [%]	κ [%]
0.01	95	5	0
.026	50	50	0
.06	7	93	0
.15	0	100	0
4	0	94	6
10	0	77	23
24	0	50	50
100	0	16	84

Diese Daten sind in Abb. 2.16 dargestellt, und daraus folgt eindeutig, dass **in der Strahlentherapie der Comptoneffekt die maßgebliche Wechselwirkung** ist.

In Abb. 2.17 ist der Massenschwächungskoeffizient μ/ρ für typische Materialien gezeigt. Die Komponenten des Massenschwächungskoeffizienten hängen nicht nur von der Photonenenergie ab, sondern natürlich auch von der durchstrahlten Materie, speziell von deren Kernladungszahl Z und Nukleonenzahl A (nach [33]):

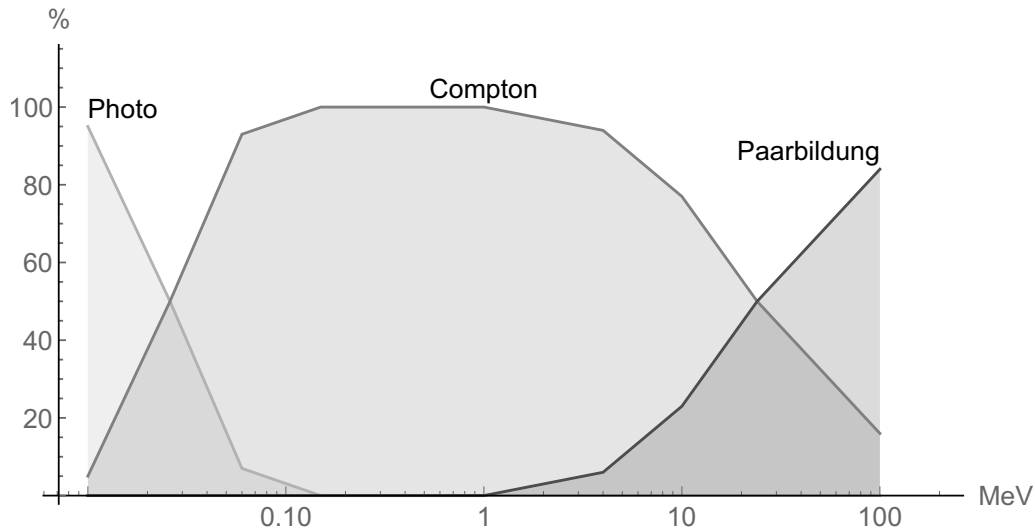


Abbildung 2.16: Energieabhängige Wichtung relevanter Wechselwirkungen (in Wasser).

Rayleighstreuung	Photoeffekt	Comptoneffekt	Paarbildungseffekt
$\frac{\sigma_R}{\rho} \sim \frac{Z^{2.5}}{A \cdot (h\nu)^2}$	$\frac{\tau}{\rho} \sim \frac{Z^4}{A \cdot (h\nu)^3}$	$\frac{\sigma}{\rho} \sim \frac{Z}{A \cdot \sqrt{h\nu}}$	$\frac{\kappa}{\rho} \sim \frac{Z^2}{A} \cdot \ln\left(\frac{h\nu}{2m_e c^2}\right)$

Näherungsweise kann man $A \sim Z$ setzen, was bedeutet, dass der Compton-Anteil (σ/ρ) am Massenschwächungskoeffizienten als nahezu materialunabhängig betrachtet werden kann, und der Comptoneffekt selbst – neben der Energie – nur noch von der Elektronendichte abhängt. Insbesondere heißt das, dass Materialien mit niedrigem Z (Wasser, Gewebe, ...) in einem weiten Energiebereich einen fast identischen Massenschwächungskoeffizienten (μ/ρ) aufweisen, vgl. die Werte von Wasser und Knochen in Abb. 2.17.

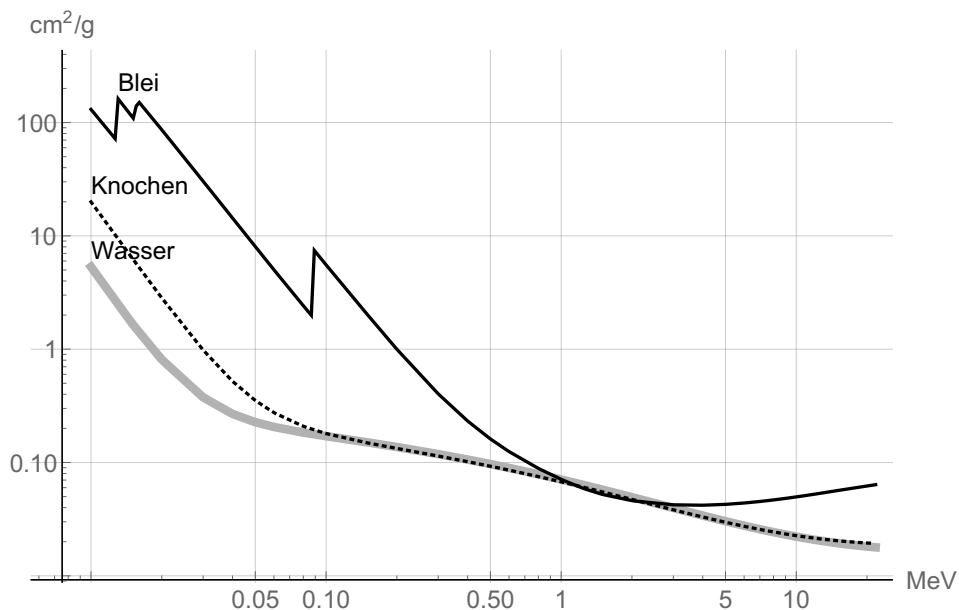


Abbildung 2.17: Massenschwächungskoeffizient für Knochen („CompactBoneICRU“), Blei und Wasser (nach [32]).

2.2 Wechselwirkung von Elektronen mit Materie

Die Betrachtung von Elektronen ist wesentlich für jede Art von Strahlung, da es stets die Elektronen sind, die letztendlich die Strahlungsenergie in der Materie deponieren. Es ist dabei immer die Coulomb-Kraft, über die die Elektronen entweder mit Hüllenelektronen oder mit Kernen in Wechselwirkung treten.

2.2.1 Bedeutung des Stoßparameters

Typischerweise und modellhaft werden drei Fälle unterschieden, je nach Größe des Stoßparameters b (senkrechter Abstand des Kerns von der Elektronenbahn) in Relation zum Atomradius a :

Entfernung groß ($b \gg a$): Dies wird assoziiert mit „weichen Stößen“; die Vorstellung ist hier, dass das Elektron auf das Atom als Ganzes wirkt, was zu Anregung bzw. Ionisation der äußersten Hüllenelektronen führen kann.

Entfernung intermediär ($b \approx a$): Passiert ein Elektron ein Atom in einem Abstand von der Größenordnung des Atomradius, kann es zu einer Wechselwirkung mit einem einzelnen Hüllenelektron kommen, das so einen wesentlichen Anteil der kinetischen Energie erhalten kann. Man spricht dann von einem „harten Stoß“, das angestoßene Elektron bezeichnet man als δ -Elektron. Da ein solches δ -Elektron selbst ein Spur von Anregung und Ionisation in der Materie zieht, könnte man es zur Elektronenfluenz zählen (Spencer-Attix). Das ionisierte Atom kehrt durch eine Kaskade von Prozessen wieder zu seinem Grundzustand zurück wie beim Photoeffekt (Kap. 2.1.2).

Bei den beiden oben aufgezählten Fällen von Elektron-Elektron-Wechselwirkung spricht man von *Møller-Streuung*. In diesem Kontext wird das Hüllenelektron als „frei“ betrachtet. Der zugehörige Streuquerschnitt lautet (z.B.: [29], [25], vgl. Abb. 2.18):

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{e^4}{8\pi\epsilon_0^2(m_e c^2)^2} \frac{1}{\tau^2} \frac{(\tau+1)^2}{(\tau+2)} \left[\underbrace{\frac{\tau^2}{(\tau+1)^2} + \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{2\tau+1}{(\tau+1)^2(1-\epsilon)\epsilon} + \frac{1}{(1-\epsilon)^2}}_{= \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{2\tau+1}{(\tau+1)^2} + \frac{2\tau^2}{(\tau+1)^2} + \epsilon \frac{(2\tau^2+2\tau+1)}{(\tau+1)^2} + O(\epsilon^2)} \right] \quad (2.17)$$

Dabei bedeutet:

- T die kinetische Energie des Elektrons;
- $\epsilon = Q/T$ die übertragene Energie Q in Einheiten der kinetischen Energie;
- $\tau = T/(m_e c^2)$ die kinetische Energie in Einheiten der Elektronen-Ruhemasse;

Durch den führenden $1/\epsilon^2$ -Term ist offensichtlich, dass kleine Energieüberträge (in der Größenordnung einiger eV) bei Weitem am wahrscheinlichsten sind. Rein aus der Anschauung heraus ist das verständlich, da es ja gemäß obiger Interpretation die entfernten Vorbeiflüge sind, die hier eine Rolle spielen, und diese sind entsprechend häufiger. „Harte Stöße“ mit dem Auftreten von δ -Elektronen kommen deutlich seltener vor. In der Gesamtbilanz des Energieübertrags sind aber beide Fälle vergleichbar. Der durchschnittliche Energieverlust pro Wechselwirkung in Niedrig-Z-Material liegt in der Größenordnung von 60eV [25].

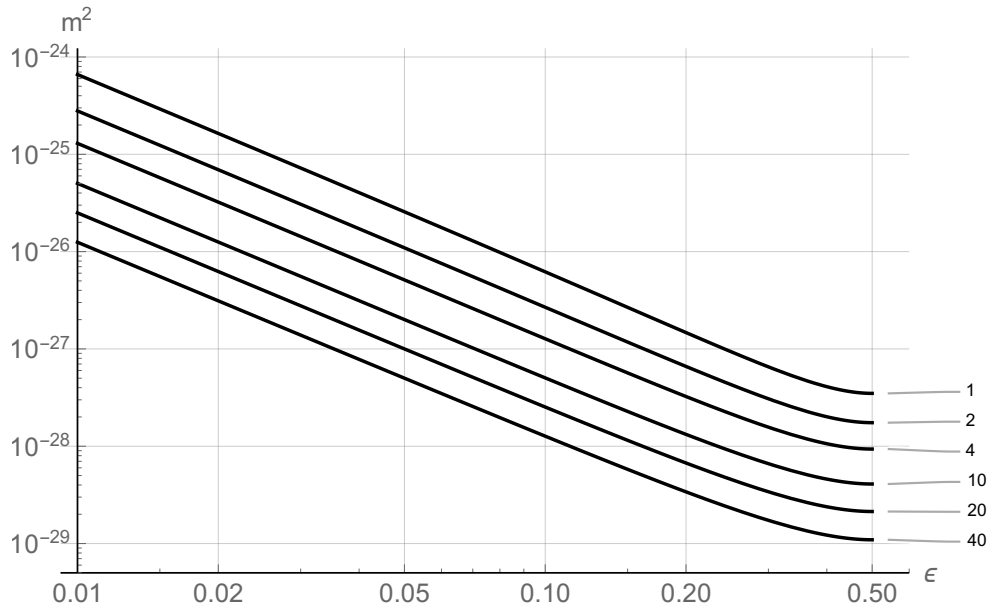


Abbildung 2.18: Møller-Streuquerschnitt für freie Elektronen für verschiedene Werte von τ . Da es sich um die Wechselwirkung identischer Teilchen handelt, ist der maximale Energieübertrag tatsächlich $\epsilon = 1/2$ (vgl. S. 84).

Entfernung klein ($b \ll a$): Das Elektron tritt in Wechselwirkung mit dem Atomkern. In ca. 97% solcher Fälle wird das Elektron ohne nennenswerten Energieverlust elastisch gestreut ($\sigma \sim Z^2$, z.B. [27]). Dies ist der Hauptgrund für den erratischen Pfad, den Elektronen in Materie zeigen. In den restlichen 2%–3% der Fälle tritt eine Abbremsung ein und Bremsstrahlung wird emittiert. Für den entsprechenden Streuquerschnitt gilt allgemein: $\sigma \sim Z^2/m^2$; dieser Prozess ist deshalb nur für Elektronen in Hoch- Z -Material von Bedeutung (und nicht für schwerere Ionen oder Elektronen in Niedrig- Z -Material). Die Winkelverteilung der Bremsstrahlung ist proportional zu (vgl. Abb. 2.19):

$$p(\theta) \sim \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad \Longrightarrow \quad \theta_{\max} = \arccos \left[\frac{1}{3\beta} (\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1) \right] \quad (2.18)$$

Im Energiebereich der Strahlentherapie (z.B. 6MV $\Rightarrow \beta (= v/c) \approx 1$) findet also hauptsächlich Vorwärtsstreuung statt. Die Strahlungsleistung bei einem solchen Bremsvorgang beträgt:

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}; \quad (a : \text{Beschleunigung}) \quad (2.19)$$

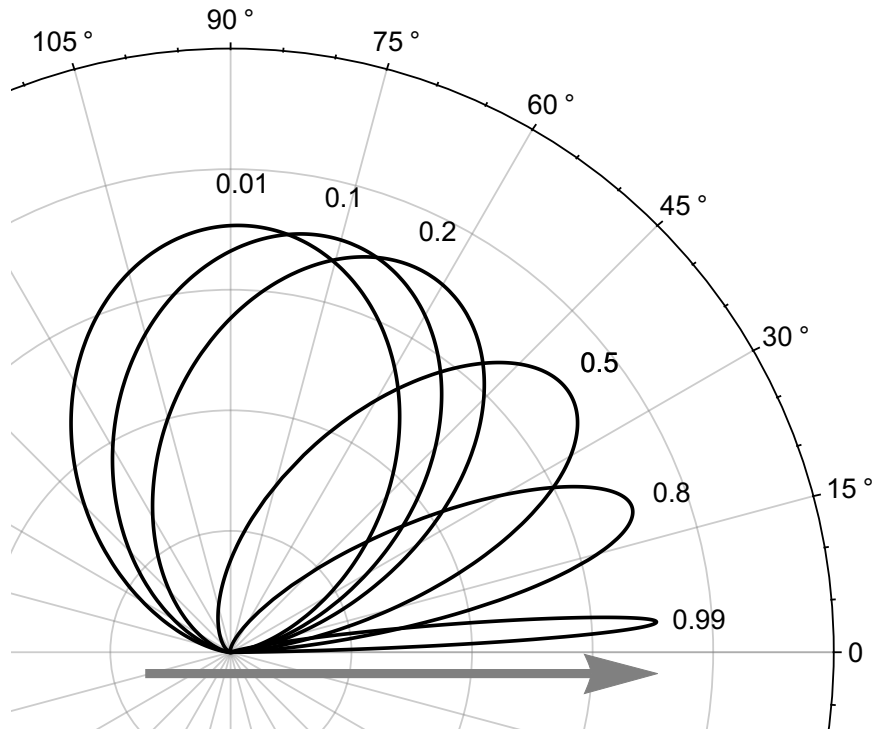


Abbildung 2.19: Winkelverteilung der Bremsstrahlung für verschiedene Werte von β .

2.2.2 Bremsvermögen

Die Vorstellung eines kontinuierlichen Energieverlusts der Elektronen auf ihrem Weg durch die Materie – bedingt durch viele kleine Energieüberträge – führt ganz zwangsläufig auf das Konzept einer Abbremsung; das **lineare Bremsvermögen** S ist definiert als mittlerer Energieverlust pro Länge des Elektronenpfades:

$$S = \frac{dE}{dl}. \quad (2.20)$$

Dementsprechend hat S die Einheit [J/m = N], es handelt sich also tatsächlich um eine Kraft.

Wie schon bei den Photonen wird auch hier unterschieden bzgl. der Art des Energieverlusts; für Dosimetrie muss der Effekt quasi aus der Perspektive der bestrahlten Materie gesehen werden: Erfolgt er durch Wechselwirkung mit Hüllenelektronen, spricht man von Stoßbremsvermögen S_{col} , bei Wechselwirkung mit Atomkernen von Strahlungsbremsvermögen S_{rad} , es gilt:

$$S = S_{\text{col}} + S_{\text{rad}}.$$

Zwischen den beiden Anteilen gibt es eine interessante Näherung (z.B. [25]):

$$\frac{S_{\text{rad}}}{S_{\text{col}}} \approx \frac{Z \cdot E}{1600 \cdot m_e c^2}$$

Eine in der Dosimetrie wichtige Größe ist das **Massenbremsvermögen** S/ρ , bzw. das **Massenstoßbremsvermögen** S_{col}/ρ , etc..

(Massen-)Stoßbremsvermögen

Als grundlegende Formel zur Berechnung des Massenstoßbremsvermögens wird in der Literatur (z.B. [29], [25]) angegeben:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dE}{dl} \right)_{\text{col}} = N_A \left\langle \frac{Z}{A} \right\rangle \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} Q \frac{d\sigma}{dQ} dQ \quad \left(= N_A \left\langle \frac{Z}{A} \right\rangle T \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} \epsilon \frac{d\sigma}{d\epsilon} d\epsilon \right) \quad (2.21)$$

N_A ist die Avogadro-Konstante, Z bzw. A die atomare Kernladungs- bzw. Massenzahl ($\langle \dots \rangle$ ist bei Stoffgemischen der Mittelwert). Man sollte nun versuchen, diesen Ausdruck zu verstehen und herzuleiten: Die Schwächung einer Elektronenstrahlung erfolgt über die Abnahme der kinetischen Energie. Beginnen kann man deshalb mit einer Überlegung analog wie bei Gl. (2.6), nur statt der Teilchenbilanz wird eine Energiebilanz angesetzt:

$$dE = \sigma n dx \langle Q \rangle;$$

da es um die Berechnung des Bremsvermögens (was eine positive Größe sein soll) geht, wird das Minuszeichen unterschlagen. Der Ausdruck ($\sigma n dx$) ist wieder die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung beim Durchtritt durch eine dünne Schicht, $\langle Q \rangle$ ist der mittlere Energieübertrag pro Wechselwirkung und dE ist schließlich die Energie, die dann im Mittel in dieser Schicht verbleibt. Für die Elektronendichte n (= Anzahl/Volumen) gilt:

$$n = \rho N_A \frac{Z}{A}$$

und $\langle Q \rangle$ berechnet sich aus

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{\sigma} \int Q \frac{d\sigma}{dQ} dQ.$$

Damit ergibt sich sofort Gl. (2.21).

Im Kontext von S_{col} und Elektronen handelt es sich um die Wechselwirkung identischer Teilchen. Nach der Wechselwirkung – dem „Stoß“ – läßt sich grundsätzlich nicht sagen, welches das stoßende und welches das gestoßene war. Es besteht deshalb die *Konvention* (!), dass danach dasjenige mit der größeren Energie als das stoßende (Fluenz-) Elektron aufgefasst wird – und umgekehrt. Deshalb ist hier der maximal mögliche Energieübertrag $Q_{\max} = T/2$, bzw. $\epsilon_{\max} = 1/2$ (vgl. Abb. 2.18, im Møller-Streuquerschnitt ist dies bereits implizit enthalten). Problematisch bei der Auswertung von Gl. (2.21) ist u.a. tatsächlich die Bestimmung von Q_{\min} . Anschaulich geht es dabei um die Frage nach dem maximalen Stoßparameter b_{\max} , der bzgl. der Wechselwirkung noch berücksichtigt wird.

Z.B. der ICRU report 37 [29] skizziert die Auswertung von Gl. (2.21): Zunächst wird eine Energieschwelle Q_c festgelegt, für die gelten soll:

- $Q_c \gg$ Bindungsenergie der Hüllenelektronen, dies ist die Beschränkung von Q_c nach unten;
- Stoßparameter, die mit Energien $Q < Q_c$ assoziiert werden, müssen groß gegenüber den Atomdimensionen sein, d.h. $b(Q < Q_c) \gg a$; dies ist die Beschränkung von Q_c nach oben;

Gl. (2.21) zerfällt dann in:

$$\frac{1}{\rho} S_{\text{col}} = \left(\dots \int_{Q_{\min}}^{Q_c} \dots dQ \right) + \left(\dots \int_{Q_c}^{Q_{\max}} \dots dQ \right).$$

Der erste Term wird nach der Bethe–Theorie ausgewertet, beim zweiten Term (hohe Energieüberträge, Elektronen quasi „frei“) wird der Møller–Streuquerschnitt (Gl. (2.17)) verwendet. Das etwas längliche Ergebnis (mit seinen Näherungen und Korrekturen) lautet:

$$\frac{1}{\rho} S_{\text{col}} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \left\langle \frac{Z}{A} \right\rangle \underbrace{\left(\frac{(\tau + 1)^2}{\tau^2 + 2\tau} \right)}_{1/\beta^2} \left[2 \ln \left(\frac{m_e c^2}{I} \right) + \ln \left(\frac{\tau^2 (2 + \tau)}{2} \right) + F^-(\tau) - \delta(\tau) \right] \quad (2.22)$$

mit

$$F^-(\tau) := \underbrace{\left(\frac{1}{(\tau + 1)^2} \right)}_{(1-\beta^2)} \left[1 + \frac{\tau^2}{8} - (2\tau + 1) \ln 2 \right] \quad (\text{Term spezifisch für Elektronen})$$

$r_e = \mu_0 e^2 / (4\pi m_e)$ ist wieder der klassische Elektronenradius (vgl. S. 73), I ist das mittlere Anregungspotential – eine materialabhängige Konstante aus der Bethe–Theorie, δ ist die sog. Dichteeffektkorrektur.

Die wesentlichen Eigenschaften lassen sich besser in vereinfachter Form erkennen:

$$\frac{1}{\rho} S_{\text{col}} \sim \frac{1}{v^2} \left\langle \frac{Z}{A} \right\rangle [-2 \ln(I) + f(\tau) - \delta(\tau)]$$

- Der Ausdruck geht für kleine Geschwindigkeiten mit $\sim 1/v^2$, was quasi einen abrupten Stopp bedeutet. (Dies gilt so auch für schwerere Teilchen, was dann zum Bragg–Peak führt.)
- In Richtung hoher Energie steigt die Kurve wieder an; dies liegt an einem relativistischen Effekt, der bewirkt, dass sich das elektrische Feld des Elektrons verzerrt mit dem Faktor $(1 - \beta^2)/(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}$ [34], vgl. Abb. 2.20; insbesondere vergrößert sich die Reichweite der Wechselwirkung seitlich zur Flugbahn ($\theta = \pm\pi/2$) um den Faktor $1/\sqrt{1 - \beta^2}$;
- Dem wirkt der sog. Dichteeffekt oder Polarisierungseffekt entgegen: Die Wechselwirkung wird durch Polarisierung der umgebenden Materie abgeschirmt – ein Effekt, der dichteabhängig ist; dafür steht die material- und dichteabhängige Dichteeffektkorrektur δ .

Abb. 2.21 zeigt dies beispielhaft für Wasser und Luft. Verwendet wurde dazu (nach [31]) für Wasser: („water liquid“, $\langle Z/A \rangle = 0.555087$, $I = 78\text{eV}$) und für Luft: („dry air“, $\langle Z/A \rangle = 0.49919$, $I = 85.7\text{eV}$). Durch den erst viel später einsetzenden Dichteeffekt hat Luft ab ca. 9MeV ein größeres Massenstoßbremsvermögen als Wasser.

Beschränktes (Massen-)Stoßbremsvermögen

Dosimetrisch relevant ist die Energie, die *lokal*, d.h. in unmittelbarer Nähe der Elektronenbahn deponiert wird. Es gilt also die Arten von Energietransfer, bei denen die Energie in entferntere Raumbereiche entschwindet, aus der Bilanz zu nehmen. Durch das Konzept von S_{col} und S_{rad} ist dies für Photonen bereits geschehen. Nun sind noch die hochenergetischen Anteile der δ -Elektronen (Kap. 2.2.1) auszuschließen. In vereinfachter Weise geschieht dies durch das Setzen von $Q_{\text{max}} = \Delta$ in Gl. (2.21). Im Ergebnis ergibt

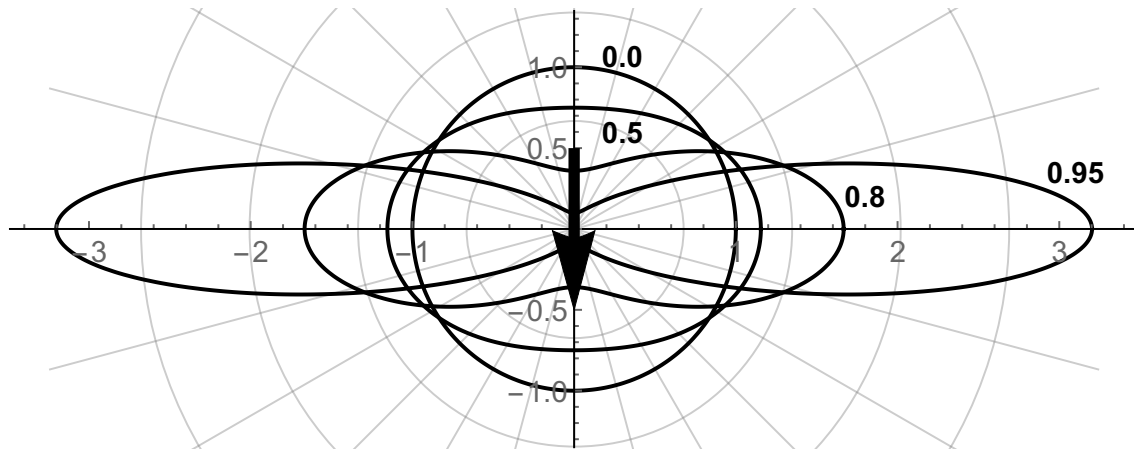


Abbildung 2.20: Relativistischer Verzerrungsfaktor des elektrischen Feldes für eine sich bewegende Punktladung (für verschiedene Werte von β). Der zentrale Pfeil kennzeichnet die Bewegungsrichtung.

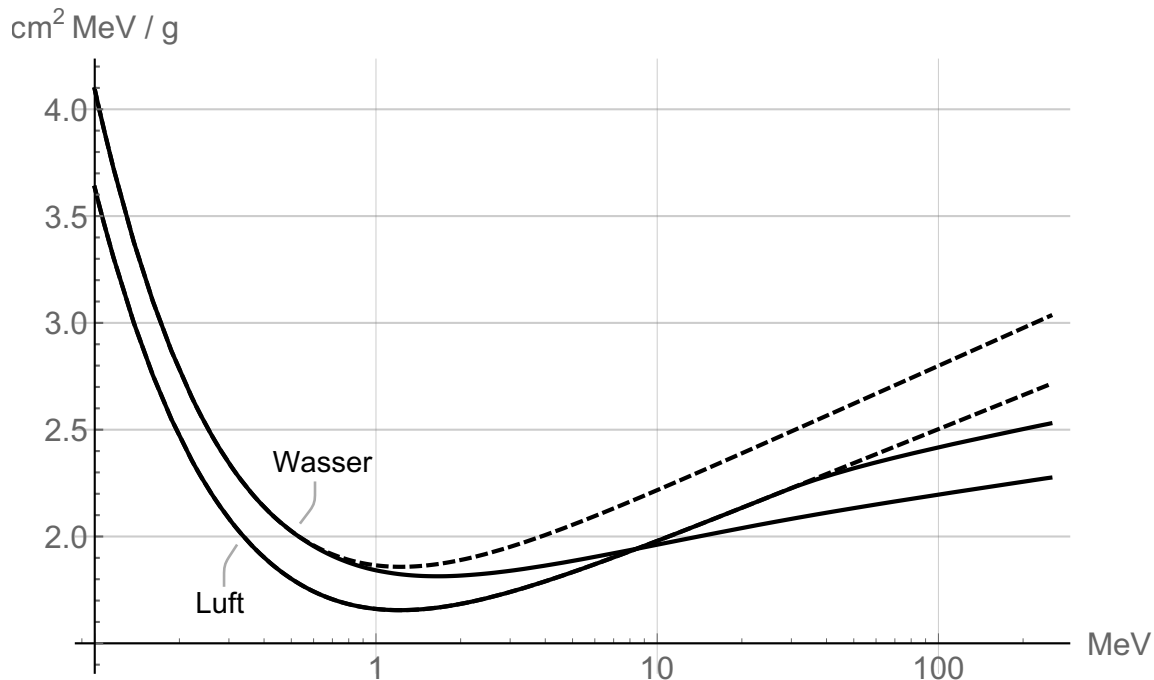


Abbildung 2.21: Massenstoßbremsvermögen für Wasser und Luft gemäß Gl. (2.22). Die gestrichelten Kurven zeigen den Verlauf ohne Berücksichtigung der Dichteeffektkorrektur δ . (Werte für Dichteeffektkorrektur nach [32]).

sich wieder die Gl. (2.22), nur der Term $F^-(\tau)$ ist zu ersetzen mit $G^-(\tau, \eta)$ (z.B. [29]), mit $\eta := \Delta/T$:

$$G^-(\tau, \eta) = \underbrace{\left(\frac{1}{\tau+1}\right)^2}_{-1-\beta^2} - 2 + \ln[4(1-\eta)\eta] + \frac{1}{1-\eta} + \underbrace{\left(\frac{1}{\tau+1}\right)^2}_{1-\beta^2} \left[\frac{\tau^2 \eta^2}{2} + (2\tau+1) \ln(1-\eta) \right]$$

In Abb. 2.22 ist für Wasser der Vergleich von beschränktem und unbeschränktem Massenstoßbremsvermögen gezeigt. Da – wie oben beschrieben – bei Elektronen der Energieübertrag nicht größer als $T/2$ sein kann, beginnen sich die Kurven erst ab $E = 2\Delta$ zu unterscheiden.

Der explizite Wert von Δ hat zu tun mit der freien Weglänge von Elektronen mit $T \geq \Delta$ in Relation

zu Abmessungen von Ionisationskammern. Der typische Wert von $\Delta = 10\text{keV}$ entspricht einer freien Weglänge in Luft von unter 1mm (bzgl. der Größenordnungen vgl. Abb. 2.25).

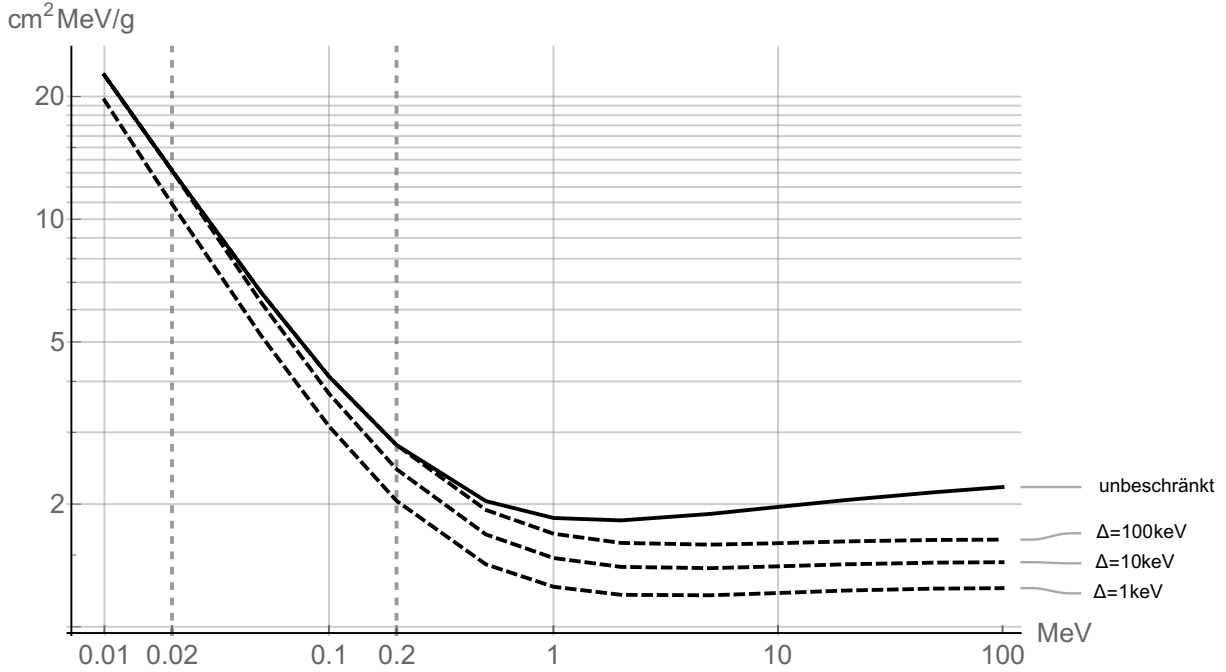


Abbildung 2.22: Beschränktes und unbeschränktes Massenstoßbremsvermögen bei Wasser für verschiedene Werte der Grenzenergie Δ (nach [32] und [29]).

(Massen-)Strahlungsbremsvermögen

Die Formel für das Massenstrahlungsbremsvermögen kommt aus der Bethe–Heitler–Theorie und kann vereinfacht formuliert werden als:

$$\frac{1}{\rho}S_{\text{rad}} = \alpha \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 N_A \frac{Z^2}{A} (T + m_e c^2) \cdot \bar{B}_{\text{rad}}; \quad (2.23)$$

$\alpha \approx 1/137$ ist die Feinstrukturkonstante, \bar{B}_{rad} stellt eine sich langsam verändernde Funktion dar, mit den Werten (nach [26], [27]): $\bar{B}_{\text{rad}}(T \ll 0,5\text{MeV}) = 5,33$, $\bar{B}_{\text{rad}}(1\text{MeV}) = 6$, $\bar{B}_{\text{rad}}(10\text{MeV}) = 12$, $\bar{B}_{\text{rad}}(100\text{MeV}) = 15$. Man kann nun versuchen, innerhalb dieses Energiebereiches diese Zahlen zu fitten, und so ergibt sich z.B.:

$$\bar{B}_{\text{rad}}(T[\text{MeV}]) \approx \frac{15440 \cdot T^2 + 19558 \cdot T + 447}{3 \cdot T(331 \cdot T + 1559)}.$$

Abb. 2.23 zeigt das Massenstrahlungsbremsvermögen für verschiedene Materialien; die starke Z -Abhängigkeit ist auffällig. Das Massenstrahlungsbremsvermögen ist außerdem proportional zur Gesamtenergie, d.h. $S_{\text{rad}} \sim (T + m_e c^2)$ bzw. für $T \gg m_e c^2$ gilt näherungsweise $S_{\text{rad}} \sim T$.

Strahlungsausbeute

Die Strahlungsausbeute $Y(T_0)$ eines Elektrons mit der kinetischen Anfangsenergie T_0 ist der Anteil der emittierten Strahlungsenergie im Verhältnis zur gesamt abgegebenen Energie:

$$Y(T_0) := \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{S_{\text{rad}}(T)}{S(T)} dT. \quad (2.24)$$

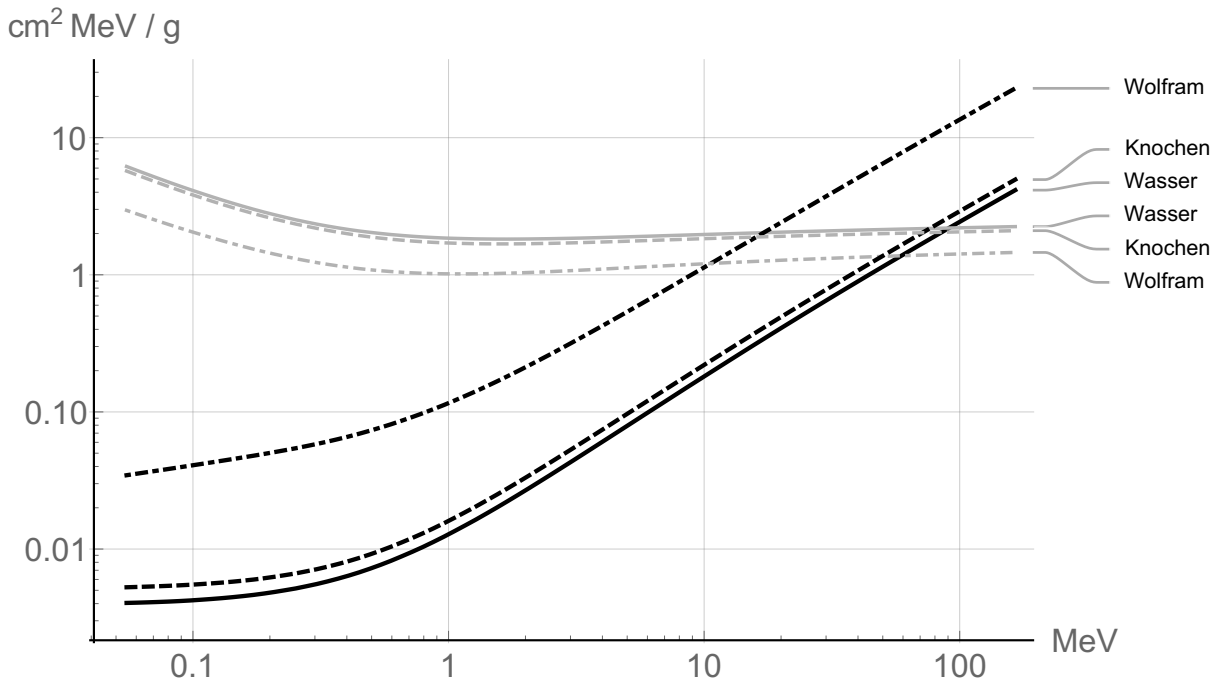


Abbildung 2.23: Massenstrahlungsbremsvermögen von Wasser, Knochen („CompactBoneICRU“) und Wolfram (zum Vergleich in grau die entsprechenden Massenstoßbremsvermögen). Werte aus [32].

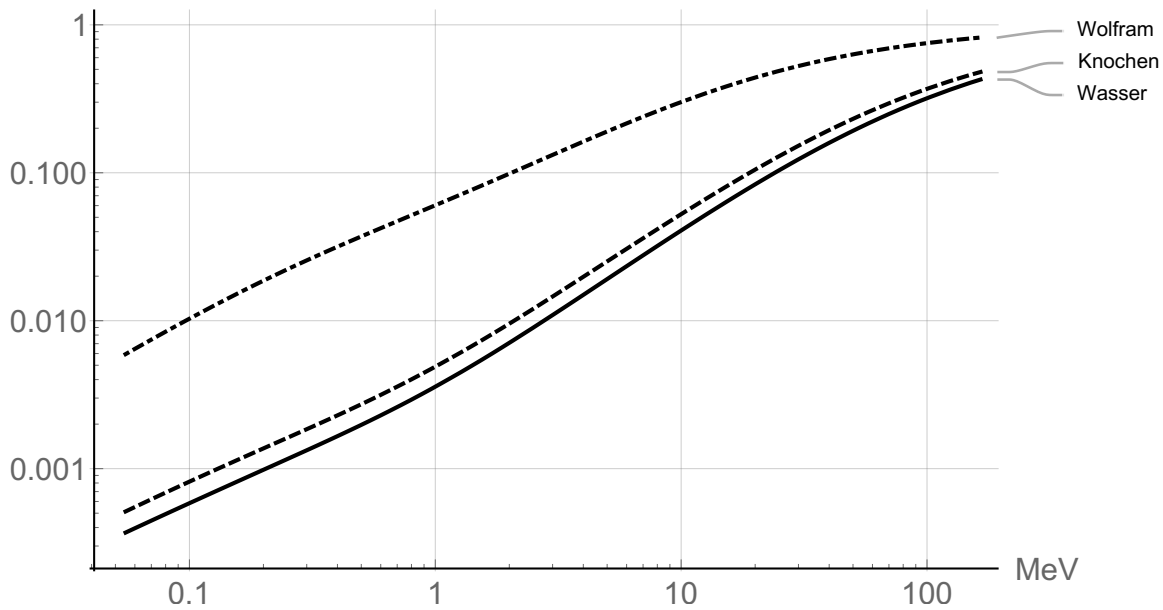


Abbildung 2.24: Bremsstrahlungsausbeute von Wasser, Knochen („CompactBoneICRU“) und Wolfram. Werte aus [32].

Wie in Kap. 2.2.1 beschrieben, wird Bremsstrahlung nur von leichten Teilchen wie Elektronen (und Positronen) emittiert, weshalb für schwerere Teilchen stets $Y(T) \equiv 0$ gilt. Aus der Definition von Y (Gl. (2.24)) folgt auch, dass die abgegebene Strahlungsmenge sich berechnet aus $T_0 \cdot Y(T_0)$.

Typischerweise beschreiben die Anfangsenergiewerte T_0 ein Spektrum. Berücksichtigt man z.B. nur den Comptoneffekt, dann ist dieses Spektrum bekannt; es ist die Ableitung des Klein–Nishima–Streuquerschnitts nach der kinetischen Energie (Gl. (2.16), Abb. 2.14).

Der Bremsstrahlungsverlust g in Gl. (2.5) stellt den Mittelwert bzgl. eines solchen Spektrums der Anfangsenergien dar [27], also z.B. im Fall des Comptoneffekts:

$$g = \langle Y \rangle = \frac{\int_0^{T_{\max}} Y(T_0) \left(\frac{d\sigma}{dT_0} \right) dT_0}{\int_0^{T_{\max}} \left(\frac{d\sigma}{dT_0} \right) dT_0} \quad (2.25)$$

CSDA–Reichweite

Mit dem Konzept des Bremsvermögens drängt sich die Berechnung einer weiteren Größe förmlich auf, nämlich die mittlere Länge eines – verschlungenen – Elektronenpfades bis zum Stillstand des Elektrons.² Dies wird als CSDA–Reichweite (CSDA: continuous slowing down approximation) bezeichnet; alternativ versteht man darunter ebendiese Pfadlänge, nur eben dichtekorrigiert. Man muss aus dem Kontext erschließen, was gemeint ist:

$$R_{\text{CSDA}} = \int_0^{E_0} \frac{1}{S(E)} dE \quad \text{oder} \quad R_{\text{CSDA}} = \int_0^{E_0} \frac{\rho}{S(E)} dE. \quad (2.26)$$

Im Grunde ist dies schlicht die Umstellung von Gl. (2.20). Abbn. 2.25 und 2.26 zeigen typische Werte.

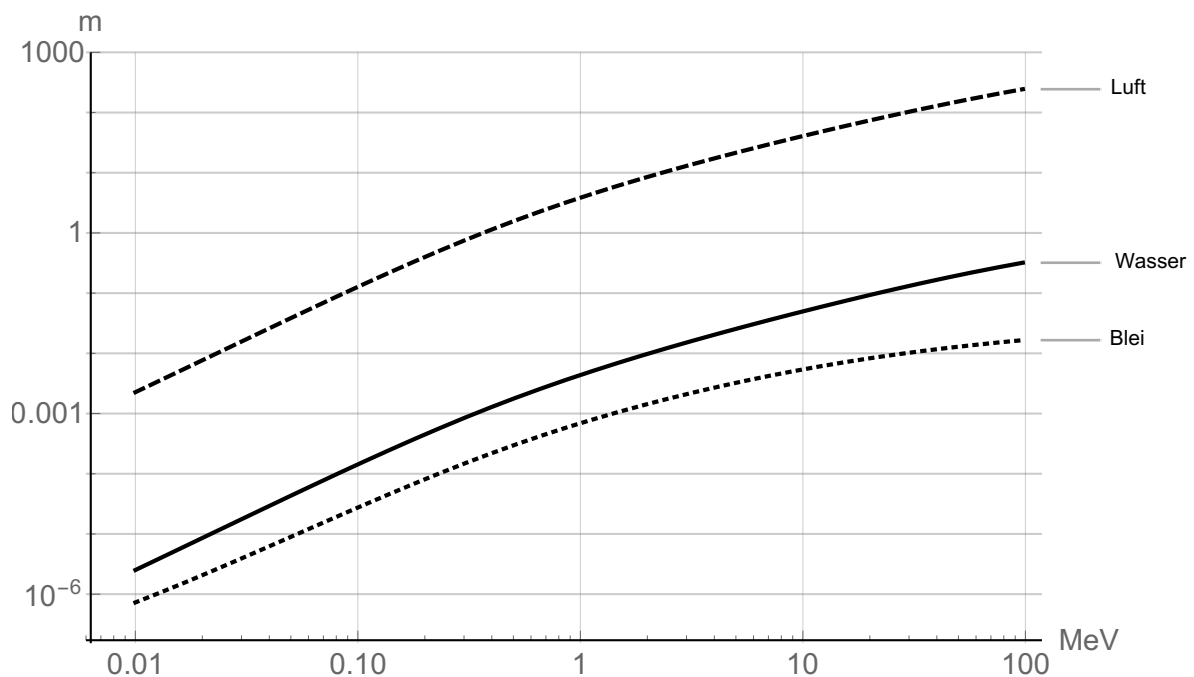


Abbildung 2.25: CSDA–Reichweite von Luft, Wasser und Blei. Werte aus [32].

²Selbstverständlich darf das nicht mit einer „Eindringtiefe“ verwechselt werden.

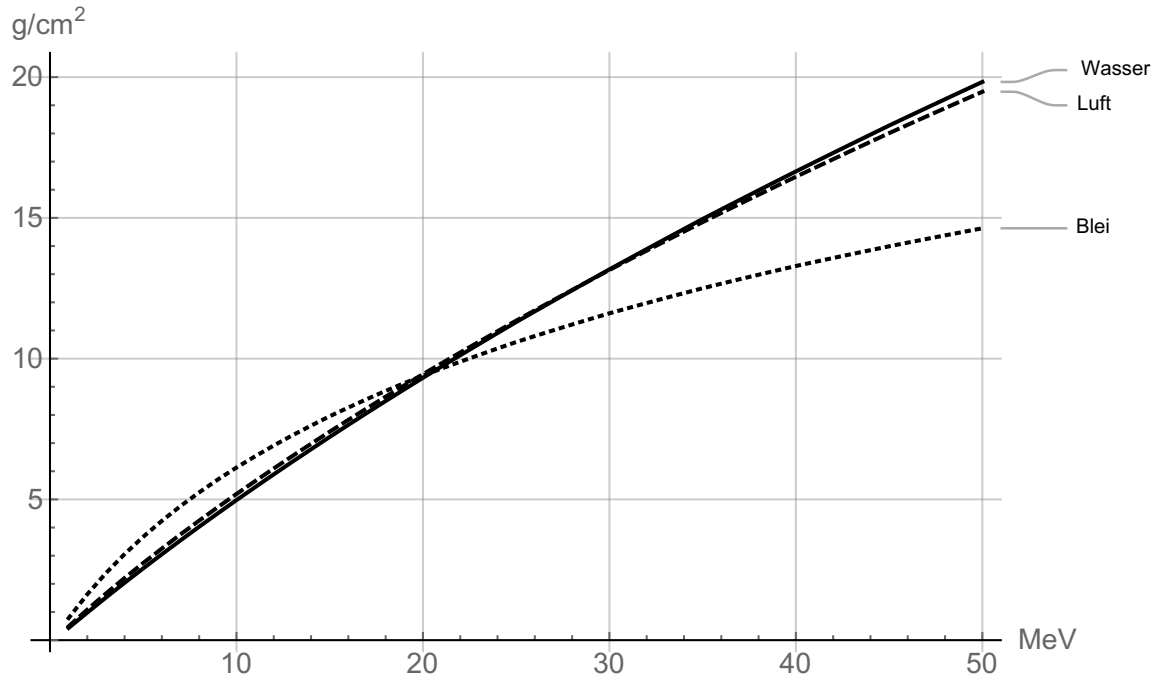


Abbildung 2.26: CSDA-Reichweite von Luft, Wasser und Blei in der dichtekorrigierten Version. Werte aus [32].

2.3 Fluenz und Spektrum

Die Teilchenfluenz ϕ bezeichnet die Zahl N der Teilchen, die eine Fläche A durchdringen, d.h. eine „Anzahldichte bezogen auf eine Fläche“³:

$$\phi = \frac{dN}{dA}; \quad \text{damit} \quad N = \int \phi \, dA. \quad (2.27)$$

Das Flächenelement dA ist dabei *nicht* in bestimmter Weise im Raum orientiert, sondern quasi stets normal zu jeder Teilchenstrahlrichtung, Abb. 2.27. Die Richtung der einfallenden Teilchen ist also nicht relevant und die Fluenz somit eine skalare Größe.

Die Fluenz sagt nichts über die Intensität des Teilchenflusses aus; dies wird erst beschrieben durch die **Fluenzrate**:

$$\dot{\phi} = \frac{d^2N}{dt dA}. \quad (2.28)$$

Haben die Teilchen unterschiedliche Energie, hängt also die Teilchenzahl von der Energie ab, dann gilt:

$$N(E) = \int \phi(E) dA; \quad \text{und somit} \quad N = \int \frac{dN(E)}{dE} dE = \int dE \int dA \frac{d\phi(E)}{dE}. \quad (2.29)$$

Die Größe $\phi_E(E) := \frac{d\phi(E)}{dE}$ stellt das (unnormierte) Teilchenfluenzspektrum dar.

Eine Fluenz von Teilchen mit der Teilchenenergie E bedeutet auch eine Energiefluenz:

$$\psi(E) = \frac{d(N \cdot E)}{dA} = \phi(E) \cdot E \quad (2.30)$$

³Eine in der strahlentherapeutischen Routine gebräuchliche Einheit ist schlicht [MU] (machine units).

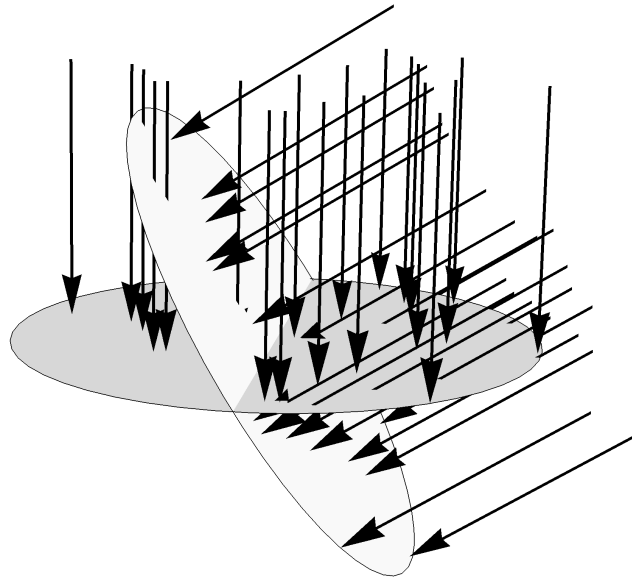


Abbildung 2.27: Zur Interpretation der Fluenz: Jede Teilchenstrahlrichtung hat ihre eigene Durchtrittsfläche, die normal zu ihr ist.

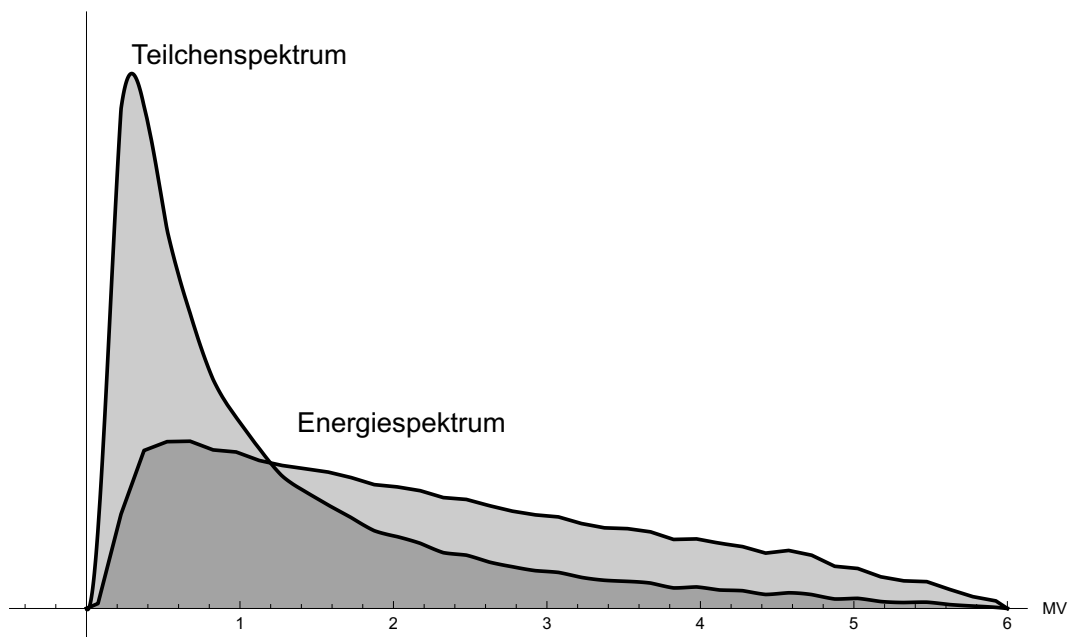


Abbildung 2.28: Typisches Teilchen- und Energiespektrum für 6MV.

und führt analog auf eine Energiefluenzspektrum (vgl. Abb. 2.28):

$$\psi_E(E) := \frac{d\psi(E)}{dE} = E \frac{d\phi(E)}{dE} = E \cdot \phi_E(E). \quad (2.31)$$

Häufig kommt in Gleichungen die Fluenz vor in der Form (ohne Berücksichtigung eines Spektrums, G als die Fluenzwichtung einer Funktion F)

$$G = F \cdot \phi. \quad (2.32)$$

Unter Berücksichtigung eines Spektrums ist dann zu setzen:

$$G_E = \int F(E) \cdot \phi_E(E) \, dE.$$

Werden Energie-Mittelwerte verwendet, läßt sich aber wieder die einfache Form der Gl. (2.32) erhalten:

$$\langle F \rangle_E = \frac{1}{\int \phi_E \, dE} \cdot \int F(E) \cdot \phi_E(E) \, dE = \frac{1}{\phi} \cdot G_E \quad \implies \quad G_E = \langle F \rangle_E \cdot \phi \quad (2.33)$$

Gleiches läßt sich auch mit ψ anstellen. Generell ist aber bei Berechnung von Mittelwerten, etc., wichtig klarzustellen, welches Spektrum dazu verwendet wurde, da selbstverständlich gilt:

$$\frac{\int F(E) \cdot \phi_E(E) \, dE}{\int \phi_E(E) \, dE} \neq \frac{\int F(E) \cdot \psi_E(E) \, dE}{\int \psi_E(E) \, dE}.$$

Für die Fluenz gibt es eine **alternative Definition**, die speziell in der Dosimetrie sehr hilfreich sein kann: Bezeichnet Δl die Summe der Längen aller Teilchenbahnen innerhalb eines Volumenelements dV , dann gilt [25] [35] [27]:

$$\phi = \frac{\sum \Delta l}{\Delta V}. \quad (2.34)$$

Man kann sich dies veranschaulichen, indem man ausgeht von der ursprünglichen Definition der Fluenz als Verhältnis von Anzahl der Durchstoßpunkte und Fläche, und beides mit einer Länge multipliziert (Abb. 2.29), was aber den Quotienten nicht verändert. Aus der Summe von Punkten N wird so die

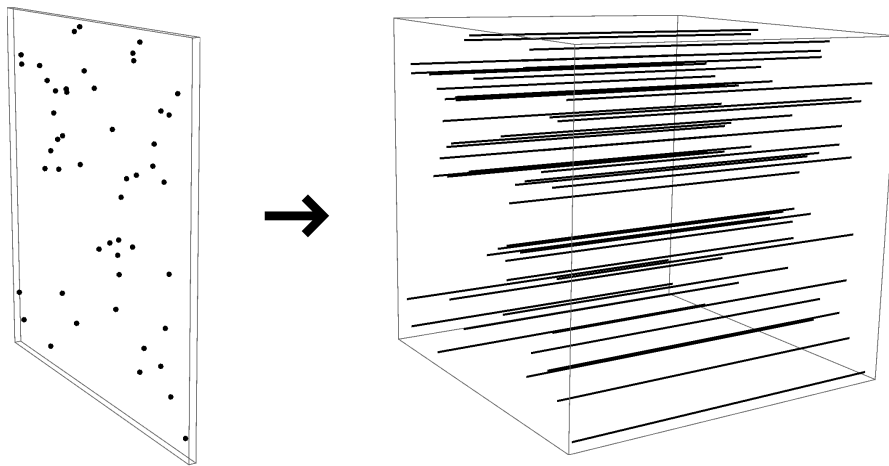


Abbildung 2.29: Veranschaulichung: Die Fluenz kann statt als Punktdichte auch als Summe der Spurlängen innerhalb eines Volumens aufgefasst werden.

Summe von Längen $\sum \Delta l$, und die Fläche wird zum Volumen (vgl. Gl. (2.44)).

Dass dies ein sinnvolles Konzept ist, sieht man beispielsweise an der Gegenüberstellung der Fluenz (in obigem Sinn) mit der „planaren Fluenz“ (z.B. [27]). Die Abb. 2.30 veranschaulicht diese unterschiedlichen Konzepte: Dargestellt ist eine einfallende Strahlung, die ein Medium durchdringt und dabei gestreut wird, so dass sie in unterschiedlichen Richtungen wieder austritt. Beispielhaft ist nur eine Streurichtung herausgegriffen. Im Fall von *durchdringender* Strahlung (dem Standardfall) misst ein volumenhafter Detektor hinter dem Streumedium eine höhere Fluenz als davor – die Summe der

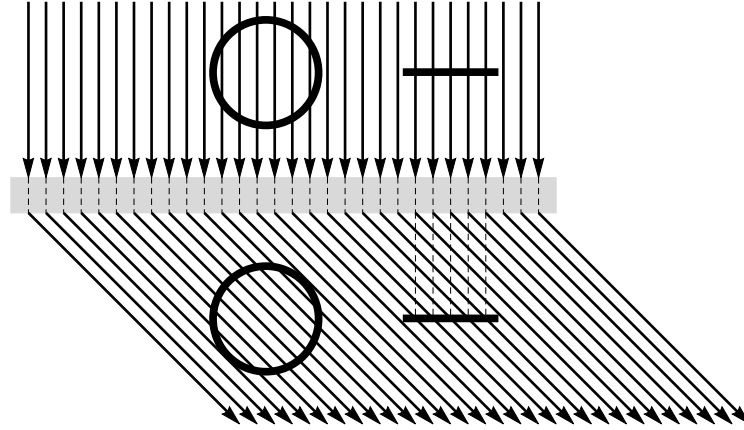


Abbildung 2.30: Zu Fluenz und planarer Fluenz: Der Kreis soll einen volumenhaften, der Strich einen flächenhaften Detektor symbolisieren (nach [27]).

Bahnlängen hat sich erhöht. (Bei einem Streuwinkel ϑ beträgt der Faktor $1/\cos\vartheta$.) Dies entspricht der Standard-Interpretation der Fluenz. Dagegen würde eine rein flächenhafte Messung (im Grenzfall von *den Detektor nicht durchdringender* Strahlung) auf beiden Seiten des Streumediums das gleiche Ergebnis liefern, d.h. die planare Fluenz ist vor und nach Streuung identisch.

2.4 Kerma, Cema und Dosis

Kerma steht für kinetic energy relaxed per unit mass. Es ist definiert als die mittlere Energie, die von indirekt ionisierender Strahlung (typischerweise Photonen) an geladene (Sekundär-)Teilchen (typischerweise Elektronen) im bestrahlten Medium übertragen wird, bezogen auf dessen Masse:

$$K := \frac{dE_{\text{tr}}}{dm}. \quad (2.35)$$

Dieser Wert ist explizit abhängig vom bestrahlten Material, das dabei auch stets anzugeben ist. Relevant wird dieses Konzept, da Energieübertragung von Photonen auf Materie ein zweistufiger Prozess ist: Zuerst übertragen die Photonen Energie via diverser Mechanismen (vgl. Kap. 2.1.2, hauptsächlich Compton) auf Sekundärelektronen. Diese verursachen dann im Medium Anregung und Ionisation und geben so *lokal* einen Großteil ihrer Energie ab. Der restliche Teil besteht aus Bremsstrahlung mit größerer Reichweite und ist damit sozusagen lokal entschwinden. Folglich teilt sich die Kerma auf in *Stoßkerma* K_{col} und *Strahlungskerma* K_{rad} :

$$K = K_{\text{col}} + K_{\text{rad}}, \quad \text{bzw.} \quad K_{\text{col}} = (1 - g)K, \quad K_{\text{rad}} = gK; \quad (2.36)$$

der Faktor g ist wieder der Bremsstrahlungsverlust (vgl. Gl. (2.5)).

Cema (converted energy per unit mass) ist das Analogon zum Kerma für direkt ionisierende Strahlung (typischerweise Elektronen):

$$C := \frac{dE_{\text{c}}}{dm}. \quad (2.37)$$

Dies ist allerdings so zu verstehen, dass der Energieübertrag nur von den primären Elektronen stammt – und nicht von sekundären, d.h. energiereiche δ -Elektronen, die von außen in das betrachtete Volumenelement eindringen [30].

Absorbierte Dosis ist definiert als mittlerer Energieübertrag (durch ionisierende Strahlung) pro Masse innerhalb eines endlichen Volumens:

$$D := \frac{d\bar{E}}{dm}. \quad (2.38)$$

Der Aspekt des endlichen Volumens (d.h. eines „kleinen“ Volumenelements) findet eigens Beachtung, da es tatsächlich um die Energiebilanz $E_{\text{in}} - E_{\text{out}}$ bzgl. des Volumens geht, also um diejenige Energie, die letztendlich lokal verbleibt.

Kerma, Cema und Dosis tragen alle die Einheit J/kg =: Gy („Gray“).

2.5 Dosimetrische Grundgleichungen

Die Beziehung zwischen Strahlungsfeld (Fluenz) und umgesetzter/deponierter Energie ist grundlegend für die Dosimetrie, deshalb werden hier diese Zusammenhänge als „Grundgleichungen“ bezeichnet. Die Herleitungen (bzgl. Fluenz zu Dosis) entsprechen im Wesentlichen denen von A. Nahum in [25].

2.5.1 Von Photonenfluenz zu Kerma und Dosis

Die Strahlungsenergie, die beim Durchtritt von N Photonen durch eine dünne Schicht der Dicke dl umgesetzt wird, ist:

$$dE_{\text{tr}} = E(0) - E(0 + dl);$$

geht man in der üblichen Weise von einem exponentiellen Schwächungsgesetz aus, dann gilt:

$$E(l) = E_0 e^{-\mu_{\text{tr}} l} \approx E_0 \cdot (1 - \mu_{\text{tr}} l) \quad \Rightarrow \quad E(dl) = E_0 \cdot (1 - \mu_{\text{tr}} dl)$$

und also

$$dE_{\text{tr}} = E_0 \mu_{\text{tr}} dl.$$

Damit kommt man schließlich auf die Definition des Masse-Energie-Transfer-Koeffizienten (μ_{tr}/ρ) aus dem ICRU Report 85a [30]:

$$\frac{\mu_{\text{tr}}}{\rho} = \frac{1}{\rho E_0} \frac{dE_{\text{tr}}}{dl}.$$

Dies ist der Ausgangspunkt der eigentlichen Herleitung. Man schreibt nun:

$$dE_{\text{tr}} = \mu_{\text{tr}} \underbrace{N h\nu}_{E_0} dl \quad \left| \cdot \frac{1}{dm} \right.$$

und dividiert beide Seiten mit einem Massenelement $dm = \rho dV$, somit:

$$\frac{dE_{\text{tr}}}{dm} = \left(\frac{\mu_{\text{tr}}}{\rho} \right) h\nu \left(\frac{N dl}{dV} \right).$$

Der linke Term repräsentiert die Kerma K (vgl. Gl. (2.35)), und $(N dl/dV)$ kann als Photonenfluenz ϕ identifiziert werden (vgl. Gl. (2.34)). Damit erhält man das wichtige Ergebnis:

$$K = \left(\frac{\mu_{\text{tr}}}{\rho} \right) h\nu \phi = \left(\frac{\mu_{\text{tr}}}{\rho} \right) \psi. \quad (2.39)$$

Kerma ist also stets proportional zu Fluenz.

Dosimetrisch interessant ist die lokale Energiedeposition. Dazu multipliziert man beide Seiten mit $(1 - g)$ und verwendet die Gln. (2.5) und (2.36):

$$K \cdot (1 - g) = \left(\frac{(1 - g)\mu_{tr}}{\rho} \right) h\nu\phi \Leftrightarrow K_{col} = \left(\frac{\mu_{ab}}{\rho} \right) h\nu\phi. \quad (2.40)$$

Die Stoßkerma K_{col} wäre im Grunde schon die gesuchte Dosis innerhalb eines Volumenelements, würde nicht ein Teil der Energie mit den Sekundärelektronen abwandern. Andererseits kann es auch zu einem Energieeintrag kommen durch Sekundärelektronen aus benachbarten Volumenelementen. Unterstellt man Isotropie, dann gleichen sich die beiden Effekte aus und die Stoßkerma ist identisch mit der Dosis. Diesen Idealzustand nennt man *Sekundärelektronengleichgewicht*. Abb. 2.31 soll die Idee verdeutlichen.

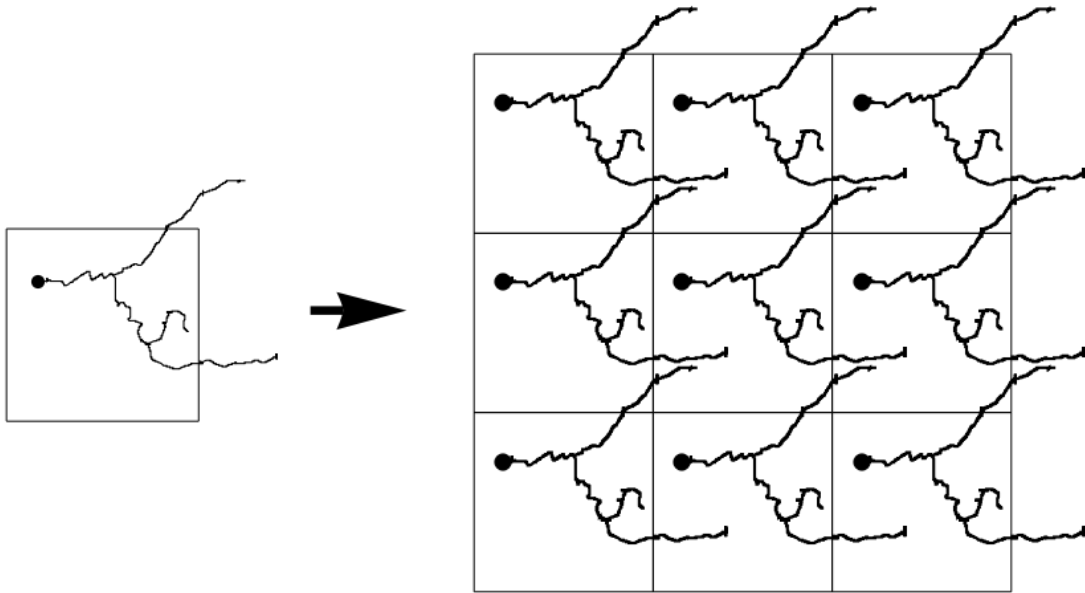


Abbildung 2.31: Symbolische Darstellung des Sekundärelektronengleichgewichts: In jedem Volumenelement entstehen gleich viel Sekundärelektronen mit gleich großer Energie.

Tatsächlich ist aber die Ausbildung eines Sekundärelektronengleichgewichts praktisch nur für kleine Energien möglich, da ein solches voraussetzt, dass sich innerhalb der Elektronenreichweite die Fluenz nicht ändert. Die folgende Abschätzung soll das verdeutlichen. Für Niedrig- Z -Material läßt sich für die mittlere Reichweite $\langle R \rangle$ als Größenordnung annehmen (z.B. [27]):

$$\langle R \rangle \approx \frac{1}{2} R_{max} \approx \frac{1}{2} R_{CSDA}.$$

In Abhängigkeit von der Energie ist dann die Schwächung der Stoßkerma zu betrachten, die innerhalb dieser Reichweite stattfindet; dies ist in Tab. 2.1 gezeigt. Man geht davon aus, dass typischerweise oberhalb von 3MeV kein Sekundärelektronengleichgewicht mehr möglich ist. Stattdessen verwendet man die Vorstellung eines *transienten Sekundärelektronengleichgewichts*, bei dem – jenseits des Aufbaubereiches (vgl. Kap. 3.1) – die Dosis um eine Strecke \bar{x} in Richtung der Primärstrahlung verschoben ist. \bar{x} beschreibt die mittlere Distanz des Energietransports der Sekundärelektronen. Abb. 2.32 zeigt die typische

Energie [MeV]	μ [1/m]	$\langle R \rangle$ [m]	Schwächung
0.1	17.07	0.000072	0.0012
0.5	9.687	0.00089	0.0085
1	7.072	0.00218	0.015
2	4.942	0.0049	0.024
3	3.969	0.0076	0.030
6	2.77	0.015	0.041
10	2.219	0.025	0.054
15	1.941	0.036	0.068
25	1.747	0.056	0.094
50	1.674	0.099	0.15

Tabelle 2.1: Energie und Schwächungskoeffizient und die resultierende Schwächung innerhalb der (abgeschätzten) Elektronenreichweite (für Wasser). Werte aus [32].

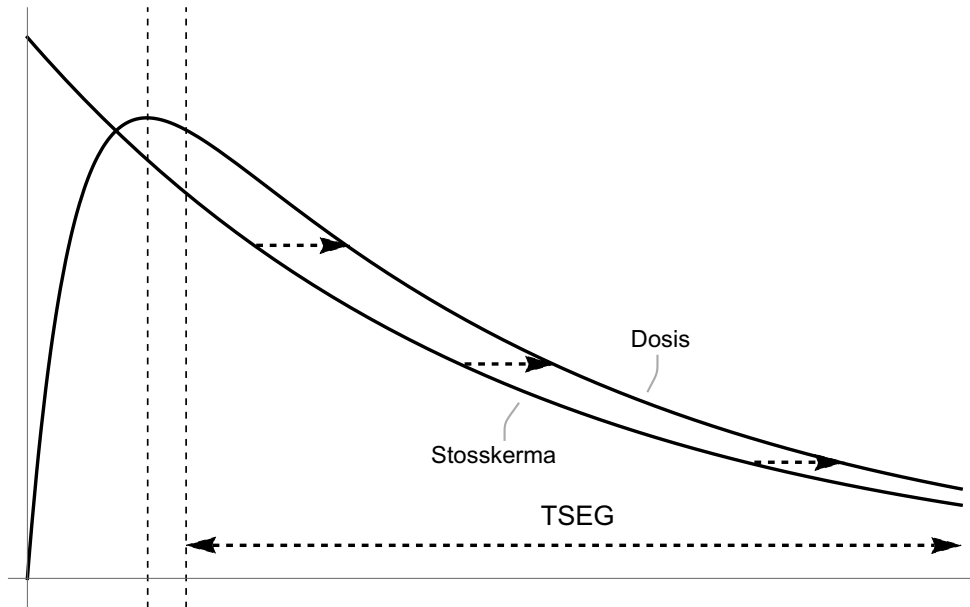


Abbildung 2.32: Schematische Darstellung des *transienten* Sekundärelektronengleichgewichts (TSEG): Der Verlauf von Stoßkerma und Dosis ist im Bereich des TSEG um die Strecke \bar{x} verschoben. Der Bereich des TSEG beginnt stets jenseits des Dosismaximums.

Darstellung des beschriebenen Sachverhalts: Im Bereich des transienten Sekundärelektronengleichgewichts ist die Dosis stets um einen Faktor β höher als die Stoßkerma, d.h.:

$$D \stackrel{TSEG}{=} \beta K_{\text{col}} \quad \text{mit} \quad \beta = e^{\mu \bar{x}} \approx 1 + \mu \bar{x}. \quad (2.41)$$

Voraussetzung für ein irgendwie geartetes Gleichgewicht ist ein Strahlungsfeld, dessen Durchmesser d mindestens der zweifachen maximalen Elektronenreichweite R_{max} entspricht, d.h. $d > (\gg) 2R_{\text{max}}$. Die betrachteten Punkte müssen mindestens den Abstand R_{max} vom Feldrand haben [27].

2.5.2 Von Elektronenfluenz zu Cema und Dosis

Ausgangspunkt ist – wie oben – die analoge Frage, welche Energie dE_c in einer dünnen Schicht der Dicke dl beim Durchtritt von N Elektronen verbleibt, nämlich (unter Verwendung der analogen Rechenschritte):

$$dE_c = S_{\text{col}} N dl \quad \Big| \cdot \frac{1}{dm = \rho dV}$$

also:

$$\frac{dE_c}{dm} = \left(\frac{S_{\text{col}}}{\rho} \right) \cdot \left(\frac{N dl}{dV} \right);$$

dE_c/dm ist das Cema (vgl. Gl. (2.37)), und auf der rechten Seite kann wieder die (nun elektronische) Teilchenfluenz identifiziert werden. Das Ergebnis lautet somit:

$$C = \left(\frac{S_{\text{col}}}{\rho} \right) \phi_{\text{el}}. \quad (2.42)$$

Ganz analog zu den Photonen muß auch hier für die Berechnung der Dosis eine ausgeglichene Bilanz der transportierten Energie gefordert werden; in diesem Fall betrifft das die energiereichen δ -Elektronen, und der zugehörige Idealzustand nennt sich δ -Elektronengleichgewicht. Dann gilt:

$$D \stackrel{\delta\text{GGW}}{=} \left(\frac{S_{\text{col}}}{\rho} \right) \phi_{\text{el}}. \quad (2.43)$$

Da δ -Elektronen im Wesentlichen kurzreichweitig sind, liegt ein δ -Elektronengleichgewicht quasi immer vor (außer z.B. im unmittelbaren Bereich von Grenzflächen).

Einen sehr interessanten Ansatz findet man in [27] („Spencer’s Derivation of the Bragg–Gray Theory“): Ein homogenes Medium enthalte eine homogen verteilte Quelle, die N Elektronen pro Masseneinheit m mit der Anfangsenergie T_0 aussendet. Das Medium soll dabei so groß sein, dass sich ein Elektronengleichgewicht ausbilden kann; δ -Elektronen und Bremsstrahlung werden vernachlässigt. Die Dosis läßt sich dann einerseits schreiben als

$$D = \frac{N \cdot T_0}{m} \quad \left(= \frac{N}{m} \int_0^{T_0} dE \right).$$

Unter Verwendung des Teilchenfluenzspektrums $\phi_{\text{E}}(E)$ (Gl. (2.29)) lautet andererseits der allgemeine Ausdruck für die Dosis unter diesen Bedingungen (vgl. Gl. (2.43)):

$$D = \int_0^{T_0} \phi_{\text{E}}(E) \frac{S(E)}{\rho} dE$$

und nach Gleichsetzung folgt:

$$\phi_{\text{E}}(E) = \frac{N}{m} \frac{\rho}{S(E)} = \frac{N}{V} \frac{1}{S(E)}.$$

Damit ergibt sich für die Elektronenfluenz insgesamt (vgl. Gl. (2.26) links):

$$\phi = \int \phi_{\text{E}}(E) dE = \frac{N}{V} \int \frac{1}{S(E)} dE = \frac{N \cdot R_{\text{CSDA}}}{V}. \quad (2.44)$$

Dieses Resultat ist in zweierlei Hinsicht interessant:

- Für obige alternative Definition der Fluenz (Gl. (2.34)) ist es sozusagen die Herleitung.
- Die Elektronenfluenz erscheint hier als *unabhängig von der Dichte des Mediums*; dies ist die Kernaussage des bemerkenswerten **Fano–Theorems** (nach [27]):
„In an infinite medium of given atomic composition exposed to a uniform field of indirectly ionizing radiation, the field of secondary radiation is also uniform and independent of the density of the medium, as well as of density variations from point to point.“

Es ist anschaulich, dass diese beiden Punkte eng zusammenhängen: Wird ein Medium z.B. geringerer Dichte mit Photonen bestrahlt, dann entstehen weniger Sekundärelektronen, wegen des geringeren Bremsvermögens sind aber deren Pfadlängen größer; wenn das Massenstossbremsvermögen dichteunabhängig ist, dann sind diese Effekte genau reziprok, und die Fluenz bleibt folglich gleich. Das Fano–Theorem gilt nicht mehr für Energien, bei denen die Dichteeffektkorrektur δ (vgl. S. 85) berücksichtigt werden muss, da durch diesen Effekt eben doch wieder eine explizite Dichteabhängigkeit ins Spiel kommt.

2.6 Dosismessung mit Ionisationskammern

Ionisationskammern sind typischerweise luftgefüllte Hohlräume, die mit Elektroden versehen sind, um die darin durch ionisierende Strahlung entstandenen freien Ladungsträger abzusaugen. Aufgrund zahlreicher Vorteile (Einfachheit, Unkompliziertheit, Langzeitstabilität, weitgehende Energieunabhängigkeit, etc.) stellen sie den „Goldstandard“ zur Dosismessung dar. Je nach Zweck gibt es verschiedenste Bauformen, häufige Realisierungen sind Zylinder- oder Fingerhutkammern (Abb. 2.33, die Sammelbezeichnung lautet *Kompaktkammer*), typischerweise mit einer Kammerwand aus Graphit, die innen elektrisch leitend beschichtet ist, und einer zylindrischen (d.h. vergleichsweise dicken) Zentralelektrode. Wandung und Zentralelektrode sind gegeneinander elektrisch isoliert und daran angelegt ist eine hohe

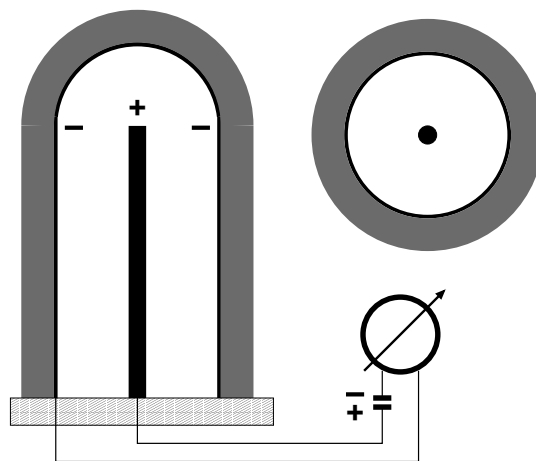


Abbildung 2.33: Schematische Darstellung einer Fingerhutkammer.

Absaugspannung: In Zählrohrterminologie erfolgt der Betrieb im Sättigungsbereich, d.h. die Spannung ist gerade so gewählt, dass freie Ladungsträger schnell und quasi ohne Rekombinationsverlust abgesaugt werden, aber ohne dass weitere Anregung möglich ist. Gemessen wird somit eine elektrische Ladungsmenge Q , die dann in Relation gesetzt wird zur Luftmenge m im Messvolumen, so dass als direkte

Messgröße für Ionisationskammern die *Ionendosis* X gilt:

$$X = \frac{dQ}{dm}.$$

Die Ionendosis ist proportional zur gesuchten Dosis D :

$$D = w \cdot X \quad \text{mit} \quad w = 33.97 \text{ [J/C = V]} \quad (\text{für Luft}) \quad (2.45)$$

(Die exakteren Werte sind: 33.97 ± 0.06 J/C für trockene Luft bei 20°C und 1013.25 hPa; berücksichtigt man bei sonst gleichen Bedingungen noch 50% Luftfeuchte, dann erniedrigt sich der Wert auf 33.77 J/C [26].) Zur Bestimmung der Dosis an einem Punkt im Medium (typischerweise Wasser) wird die Kammer „dorthin“ (siehe Kap. 2.6.1) verbracht. Um vom Messwert auf den tatsächlichen Dosiswert schließen zu können, sind eine Reihe von Maßnahmen nötig. Zunächst ist wichtig, eine homogene Dosis im Kammervolumen sicherzustellen, da nur dann der Messwert aussagekräftig ist. Grundlage der Überlegung ist eine isotrope, homogene Photonenfluenz und Sekundärelektronengleichgewicht. Dann läßt sich die Dosis auf zweierlei Weise berechnen (mit Gln. (2.40) und (2.43)):

$$D = \left(\frac{\mu_{\text{ab}}}{\rho} \right) h\nu\phi \stackrel{!}{=} \left(\frac{S_{\text{col}}}{\rho} \right) \phi_{\text{el}}$$

Der Zusammenhang zwischen Photonenfluenz und Elektronenfluenz lautet unter diesen idealisierten Bedingungen:

$$\phi_{\text{el}} = \left(\frac{\mu_{\text{ab}}}{S_{\text{col}}} \right) h\nu\phi$$

Setzt man $h\nu\phi = \text{const.}$ (d.h.: konstante Photonenfluenz), dann folgt für das Verhältnis der Elektronenfluenzen in unterschiedlichen Medien:

$$\frac{\phi_{\text{el,med1}}}{\phi_{\text{el,med2}}} = \frac{\left(\frac{\mu_{\text{ab}}}{S_{\text{col}}} \right)_{\text{med1}}}{\left(\frac{\mu_{\text{ab}}}{S_{\text{col}}} \right)_{\text{med2}}}$$

Dieses Verhältnis ist für die Medien Luft und Wasser (d.h. $\phi_{\text{el,Luft}}/\phi_{\text{el,Wasser}}$) in Abb. 2.34 in Abhängigkeit von der Photonenenergie dargestellt. Für die in der Strahlentherapie gebräuchlichen Photonenenergien verläuft also die Elektronenfluenz qualitativ so wie in Abb. 2.35 (links) gezeigt: Wird eine Konfiguration Wasser–Luft–Wasser homogen mit Photonen durchstrahlt, dann ist das Gleichgewichtsniveau in Luft niedriger als in Wasser, und die Übergänge dazwischen verlaufen kontinuierlich. Abb. 2.35 (rechts) zeigt den Verlauf von Stoßkerma und Dosis. Die Stoßkerma ist proportional zur (nach Voraussetzung) konstanten Photonenfluenz und damit abschnittsweise konstant – mit einem materialabhängigen Proportionalitätsfaktor (μ_{ab}/ρ) . Ähnlich verhält es sich mit der Dosis; sie ist proportional zur Elektronenfluenz – mit einem materialabhängigen Proportionalitätsfaktor (S_{col}/ρ) . Deshalb kommt es i.A. bei Übergängen auch hier zu einem Sprung. Ob der Wert größer oder kleiner wird, hängt von der Energie ab, vgl. Abb. 2.21.

In jedem Fall treten bei Übergängen Randeﬀekte auf, und deren Ausdehnung liegt in der Größenordnung der Elektronenreichweite. Diese Randeﬀekte stehen aber der geforderten Homogenität innerhalb des Kammervolumens entgegen. Es gibt deshalb **spezielle Konzepte** (abhängig von der Energie), um Homogenität zumindest näherungsweise zu erreichen (z.B. [33]):

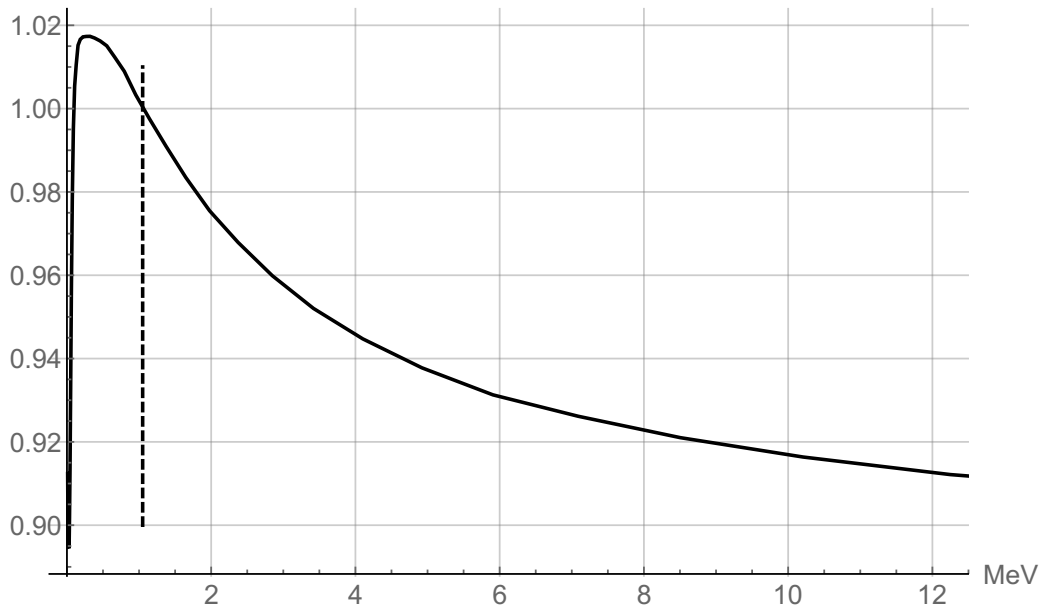


Abbildung 2.34: Verhältnis der Elektronenfluenzen $\phi_{el,Luft}/\phi_{el,Wasser}$. Werte aus [32].

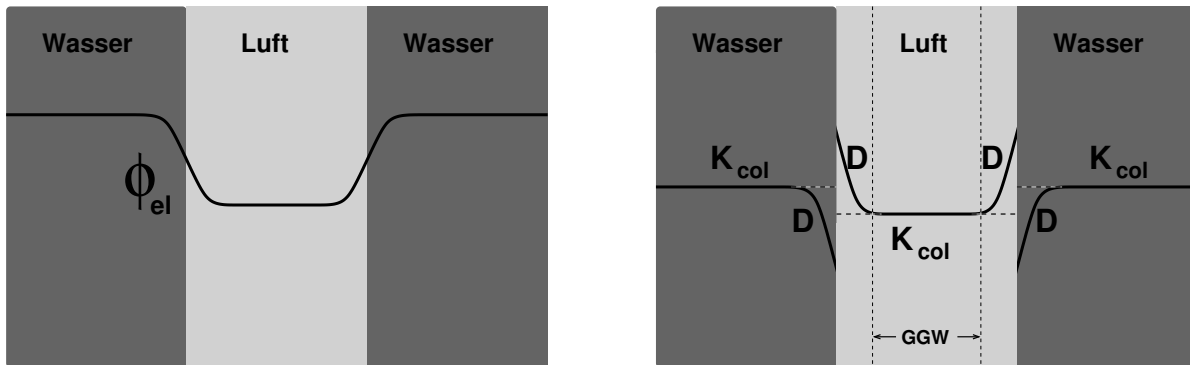


Abbildung 2.35: Links: Schematischer Verlauf der Elektronenfluenz, rechts: Der davon abgeleitete Verlauf der Dosis.

Gleichgewichtssonden: Randeffekte können vernachlässigt werden, wenn die Dimension der Kammer (in Strahlrichtung) groß gegen die Reichweite der Sekundärelektronen ist. Die Abmessungen müssen aber klein genug bleiben, damit innerhalb des Messvolumens eine konstante Photonenfluenz zumindest grundsätzlich möglich ist. Können die Randeffekte/Elektronenreichweiten nicht vernachlässigt werden, kommen Kammern mit „dicker“ Wandung aus dosimetrisch luftäquivalentem Material zum Einsatz; die Kammerwand ist dann im Idealfall aufzufassen als „komprimierte Luft“ der entsprechend erhöhten Dichte. Die Distanz bis zum Erreichen eines Sekundärelektronengleichgewichts ist dadurch beträchtlich reduziert (z.B. [24]). Ein geeignetes Material ist z.B. eben Graphit (genaugenommen hat Graphit=Kohlenstoff mit $Z = 6$ eine zu geringe Ordnungszahl gegenüber Luft mit $\langle Z \rangle = 7.67$; man versucht dies auszugleichen mit einer entsprechenden Zentralelektrode (höheres Z (z.B. Aluminium), spezielle Dimensionierung, etc., [24])); gemäß Gl. (2.40) sollte idealerweise gelten:

$$\left(\frac{\mu_{ab}}{\rho}\right)_{\text{Wand}} = \left(\frac{\mu_{ab}}{\rho}\right)_{\text{Luft}}.$$

Die Randeffekte finden dann zwar ebenso statt, aber nun in der Kammerwand, im Kammervolu-

men selbst herrscht Sekundärelektronengleichgewicht, Abb. 2.36.

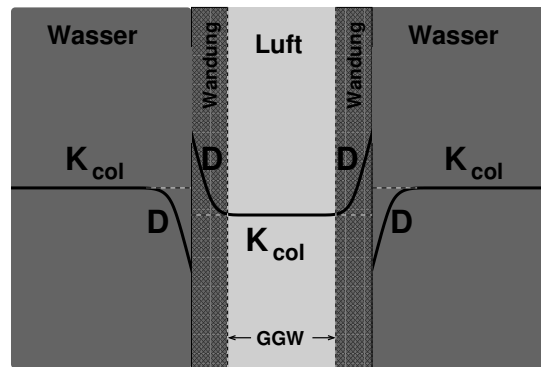


Abbildung 2.36: Gleichgewichtssonden, Prinzip der luftäquivalenten Kammerwandung: Randeffekte verlaufen dort und nicht im Messvolumen.

Die Dosis in Luft ist aus Gl. (2.45) bekannt; und unter diesen Bedingungen berechnet sich die gesuchte Dosis in Wasser (nach Gl. 2.40) aus

$$\frac{D_{\text{Wasser}}}{D_{\text{Luft}}} = \frac{\left(\frac{\mu_{\text{ab}}}{\rho}\right)_{\text{Wasser}}}{\left(\frac{\mu_{\text{ab}}}{\rho}\right)_{\text{Luft}}}$$

Aufgrund der genannten Bedingungen kommen Gleichgewichtssonden bei niedrigen Strahlungsenergien zum Einsatz.

Bragg–Gray–Sonden sind sozusagen das konzeptionelle Gegenteil von Gleichgewichtssonden: Sie sind *klein* bzgl. der Elektronenreichweite, aber groß genug, um noch ein hinreichend starkes Messsignal zu erzeugen, Abb. 2.37. Im Grundsatz geht man hier von einer konstanten Elektronenfluenz im

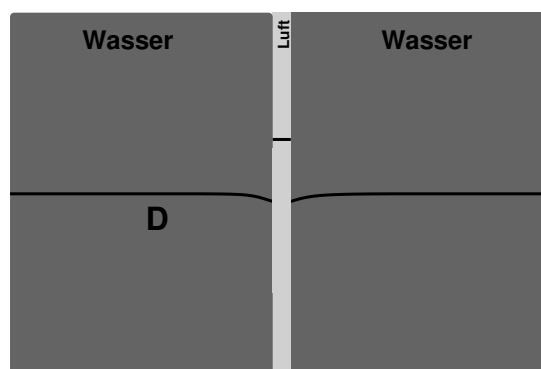


Abbildung 2.37: Bragg–Gray–Konzept: Sondendimensionierung klein gegen die Reichweite der Elektronen (im Grunde gleiche Situation wie in Abb. 2.35, rechts, nur mit stark verkleinertem Luftspalt), es resultiert eine konstante Elektronenfluenz ohne Randeffekte und ein Sprung im Dosisverlauf.

Messvolumen aus. Diese Sekundärelektronenfluenz ist die interessierende Messgröße, die möglichst „rein“ im Messvolumen vorliegen sollte. Konkret ergibt sich daraus eine einzige Forderung (Nahum in [25]), mit der alle Randbedingungen erfüllt werden: *Die Sonde darf die Elektronenfluenz*

(einschließlich deren Energieverteilung) nicht stören. Dies impliziert wiederum eine *kleine* Sonde, dessen Volumen die Elektronen nur durchqueren. Weder stoppen sie darin, noch werden neue Sekundärelektronen darin erzeugt; das Messvolumen ist in diesem Sinne quasi als „evakuierter Raum“ zu begreifen. Insbesondere bedeutet das, dass eine Bragg–Gray–Sonde als *unempfindlich für Photonen* aufzufassen ist.

Nach Gl. (2.43) ergibt sich die Dosis in Wasser dann aus

$$\frac{D_{\text{Wasser}}}{D_{\text{Luft}}} = \frac{\left(\frac{S_{\text{col}}}{\rho}\right)_{\text{Wasser}}}{\left(\frac{S_{\text{col}}}{\rho}\right)_{\text{Luft}}}.$$

Voraussetzung dafür ist natürlich auch ein δ -Elektronengleichgewicht innerhalb des Messvolumens. Aber auch hier können entstehende Randeﬀekte durch das Konzept der luftäquivalenten Kammerwand (siehe oben) aus dem Messvolumen verschoben werden (z.B. [33]). Der MV-Bereich der Strahlentherapie ist das typische Anwendungsfeld von Bragg–Gray–Sonden.

2.6.1 Effektiver Messort von Kompaktkammern

Der effektive Messort von Messkammern bezeichnet den „Punkt in dem durch die Messsonde ungestörten Phantom, für den der Messort der Wasser–Energiedosis ermittelt wird“ (aus [36]). Bei perfekt erfüllter Bragg–Gray–Bedingung läge der Messort auf der Kammerachse. Tatsächlich aber ist er etwas in Richtung der Strahlenquelle verschoben. Grund dafür ist der sog. *Verdrängungseﬀekt*, d.h. die Elektronenﬂuenz wird eben doch durch das eingebrachte Luftvolumen gestört. In [24] ist eine eingängige Erklärung dafür zu ﬁnden: Zunächst sei angenommen, alle Elektronen treffen nur aus Richtung der Strahlenquelle („von oben“, siehe Abb. 2.38) auf die Kammerwand (d.h. auf den Übergang Wasser–Luft). Ein Elektron am Punkt \mathbf{p} bewegt sich dann längs eines geradlinigen Tracks durch die Kammer. Der Messort für dieses Elektron liegt in der Höhe $h = h(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ über der Kammerachse, und das zugehörige Messsignal – die Gewichtung – ist proportional zur Tracklänge $2h$. Die mittlere Höhe $\langle h \rangle_0$ des Messorts ergibt sich aus dem gewichteten Mittelwert davon:

$$\langle h \rangle_0 = \frac{\int_{-r}^{+r} h(x) \cdot 2h(x) dx}{\int_{-r}^{+r} 2h(x) dx} = \frac{\int_{-r}^{+r} r^2 - x^2 dx}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{8r}{3\pi} \approx 0.85r$$

Nun kommen natürlich nicht alle Elektronen aus nur einer Richtung. In grober Näherung könnte man deshalb über die Richtungen der oberen Halbsphäre mitteln:

$$\langle h \rangle = \langle h \rangle_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \phi d\phi = \langle h \rangle_0 \frac{2}{\pi} = \frac{16r}{3\pi^2} \approx 0.54r$$

Jedenfall kommt man damit bereits nahe an die *Messortverschiebung* $r/2$ in Richtung der Strahlenquelle als gängige Regel.

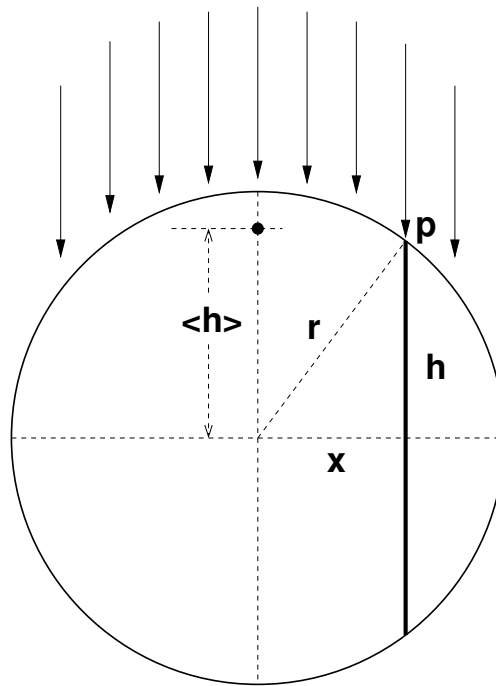


Abbildung 2.38: Messortverschiebung: Die Messung/Registrierung der einzelnen Elektronen erfolgt jeweils an der Kammerwand; für den effektiven Messort der Kammer selbst muss dann darüber gemittelt werden.

Kapitel 3

Photonenstrahlung und Dosisverteilung

3.1 Aufbaueffekt

Um vorweg eine grundsätzliche Vorstellung von Tiefendosisverläufen zu bekommen, bietet sich ein einfaches Modell an, das aber die wesentlichen Prinzipien enthält: Die einfallende Photonenstrahlung überträgt Energie an Elektronen, die dann diese (kinetische) Energie in einem Raumgebiet an die bestrahlte Materie größtenteils abgeben. Diese so deponierte Energie stellt die Dosis dar. (Die korrekte Bezeichnung für den Betrag dieser kinetischen Energie lautet „Kerma“: kinetic energy relased in matter, Kap. 2.4.) Da diese Elektronen nicht die primäre Strahlung darstellen, verwendet man dafür die Bezeichnung „Sekundärelektronen“. Zur Berechnung der tiefenabhängigen Dichte der Sekundärelektronen werden hier die folgenden vereinfachten Annahmen gemacht:

- Die *primäre* Photonenintensität nimmt exponentiell mit der Tiefe ab: $I(x) \sim e^{-\mu x}$ (nach Gl. (1.253)). Dieser Ansatz vernachlässigt z.B. Spektrum (und Strahlaufhärtung) und Divergenz.
- Die Zahl der erzeugten Sekundärelektronen ist proportional zur Photonenintensität.
- Die in der Tiefe x_0 erzeugten Sekundärelektronen nehmen in ihrer Intensität exponentiell mit zunehmender Tiefe ab, d.h. sie zeigen die Tiefencharakteristik $e^{-\lambda(x-x_0)}$. Man könnte vermuten, dass dieser Ansatz der Vorstellung einer zufälligen und vollständigen Absorption der Elektronen entstammt, was dann eben in einer Exponentialverteilung in der Tiefe (nach Art von Kap. 1.5.6) resultieren würde. Da Sekundärelektronen aber nicht absorbiert, sondern auf ihrem Weg in alle Richtungen gestreut werden, ist diese Vorstellung durchaus falsch. Der Exponentialansatz stellt aber offenbar eine gute Näherung für polyenergetische Elektronen dar [28]. (Treffender wäre demnach eine Exponentialverteilung ohne langreichweitigem Ausläufer.)
- Die deponierte Dosis in einer Tiefe ist proportional zur dortigen Dichte der Sekundärelektronen.

Mit diesen Vereinfachungen kann man ansetzen:

$$\begin{aligned} D(x) &\sim \int_0^{\infty} I(x_0) e^{-\lambda(x-x_0)} \theta(x-x_0) dx_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x_0} \theta(x_0) e^{-\lambda(x-x_0)} \theta(x-x_0) dx_0 \\ &= \left(e^{-\mu x} \theta(x) \right) * \left(e^{-\lambda x} \theta(x) \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

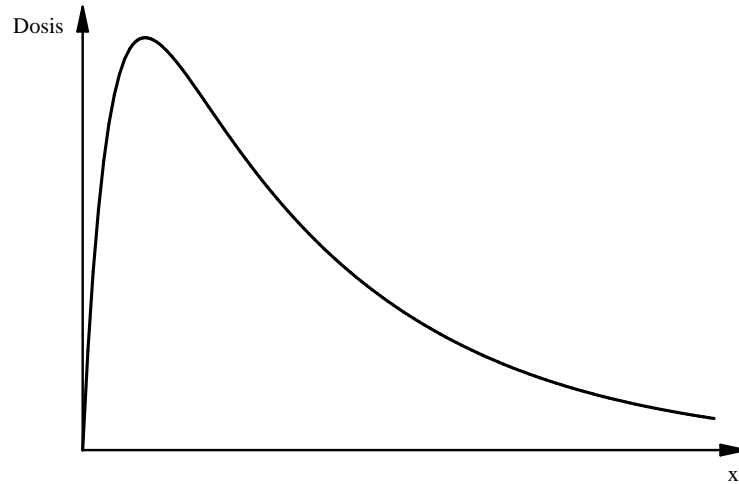


Abbildung 3.1: Prinzipieller Verlauf der Tiefendosis nach Gl. (3.2).

($\theta(x)$ bezeichnet die Heaviside-Funktion (Kap. 1.2.9).)

Der Dosisverlauf stellt sich in diesem Modell also dar als Faltung zweier halbseitiger Exponentialfunktionen, wobei $\lambda > \mu$ gilt. (Genereller könnte man die Gesamt-Tiefencharakteristik als Faltung der einzelnen Tiefencharakteristiken auffassen.) Das Integral in Gl. (3.1) kann leicht berechnet werden:

$$D(x) \sim e^{-\lambda x} \int_0^x e^{(\lambda-\mu)x_0} dx_0 = \frac{1}{\lambda - \mu} (e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}). \quad (3.2)$$

Diese Funktion ist in Abb 3.1 dargestellt. Es zeigt sich ein Dosisanstieg von der Grenzfläche (bei $x = 0$) hin zu einem deutlichen Maximum. Dieser Abschnitt wird *Aufbaubereich* genannt; dessen Ausdehnung offenbart die Größenordnung der mittleren Weglänge der Sekundärelektronen und nimmt folglich mit der Energie zu. (In der Realität ist wegen Elektronenkontamination und Rückstreuung an der Oberfläche die Dosis $D(0) > 0$.)

3.2 Charakterisierung der Tiefendosis

Strahlenphysikalische Dosimetrie von hochenergetischer Photonenstrahlung findet typischerweise in einem Wasserphantom statt. Dabei handelt es sich um einen z.B. kubischen Kasten aus Plexiglas mit ca. 1m Kantenlänge, angefüllt mit destilliertem Wasser, in dem ortsabhängig Dosis gemessen wird. Um nicht mit absoluten Dosiswerten hantieren zu müssen, werden die tiefenabhängigen Dosiswerte mit Dosiswerten in Referenziefen in Relation gesetzt. Vom Grundsatz her gibt es energieabhängig zwei Referenziefen:

- Eine Referenz-Maximumstiefe d_{\max} , die möglichst nahe am Mittelwert der Tiefen der tatsächlichen Maxima liegt; es handelt sich somit um eine *nominale* Maximumstiefe, die jeweils für eine bestimmte Energie festgelegt wird. Mit dem Begriff „Maximumstiefe“ ist üblicherweise dieser nominale Wert gemeint. Die Tiefe des tatsächlichen Maximums hängt dagegen von weiteren Parametern ab, z.B. offensichtlicher Weise von der Strahldivergenz und – weniger offensichtlich – von

der Feldgröße (siehe unten). Aus Gründen der Tabellarisierbarkeit macht es Sinn, eine nominale Maximumstiefe, die nur von der Energie abhängt, zu definieren und zu verwenden.

- Eine Referenz-Tiefe d_{ref} , die frei gewählt werden kann, aber üblicherweise in der Größenordnung der für die jeweilige Energie typischen Bestrahlungstiefe liegt.

Mögliche Werte sind z.B.: 6MV: $d_{\text{max}} = 15\text{mm}$, $d_{\text{ref}} = 50\text{mm}$,
15MV: $d_{\text{max}} = 27\text{mm}$, $d_{\text{ref}} = 100\text{mm}$.

Um den Verlauf der Tiefendosis im Zentralstrahl eines quadratischen Feldes zu charakterisieren, gibt es – speziell für hochenergetische Photonenstrahlung – zwei wichtige Ansätze der Beschreibung (z.B. [37]):

PDD (Percentage Depth Dose, Abb. 3.4(a)) bezeichnet die prozentuale Tiefendosis. Der Abstand zwischen Quelle und Wasseroberfläche wird dabei konstant gehalten (typischerweise: SSD = SAD = 100cm). Der Messort befindet sich in der Strahlachse in einer variablen Tiefe d unter der Oberfläche. Wenn der Wasserstand nicht definiert verändert werden kann, ist dies die Messmethode der Wahl. PDD ist das Verhältnis des Dosiswerts in einer bestimmten Tiefe zum Dosiswert in der Maximumstiefe d_{max} (und jeweils für eine feste Feldgröße s), angegeben in %:

$$\text{PDD}(s, d) = \frac{D(s, d)}{D(s, d_{\text{max}})} \cdot 100\%. \quad (3.3)$$

Da die Normierung über ein nominales Maximum erfolgt, können auch PDD-Werte geringfügig über 100% auftreten. Beispiele von Tiefendosiskurven bei 15MV sind in Abb. 3.2 gezeigt. Auffällig ist vor allem:

- Jenseits des Maximums nimmt die Dosis mit der Feldgröße zu. Dies ist dadurch zu verstehen, dass bei einem grösseren Feld Streustrahlung von mehr Raumpunkten am Messort ankommt.
- Die Maximumstiefe, bzw. die Dicke des Aufbaubereiches, variiert mit der Feldgröße, und zwar in einer nicht-monotonen Weise: Bei Feldgrößen von ca. 4cm–6cm ist dieser Wert am größten. Grund dafür sind unterschiedliche Effekte (z.B. [26]): Eine Abnahme der Maximumstiefe resultiert
 - bei größeren Feldern wegen Zunahme der Streuung von Collimator und Ausgleichsfilter;
 - bei kleineren Feldern wegen Abnahme von Phantomstreuung.

In Abb. 3.3 ist die jeweilige Maximumstiefe gegen die Feldgröße aufgetragen, und da zeigt sich dieser Sachverhalt deutlich.

TPR (Tissue-Phantom-Ratio, Abb. 3.4(b)) gibt die Tiefendosis in Relation zur Dosis in einer festgelegten Referenztiefe $d_{\text{ref}} \geq d_{\text{max}}$ (z.B. 10cm) an, wobei der Abstand zwischen Quelle und Messort festgehalten wird (mit typischerweise: SAD=100cm), der Messort befindet sich somit auf der Geräteachse (d.h. *isozentrischer Tiefendosisverlauf*):

$$\text{TPR}(s, d) = \frac{D(s, d)}{D(s, d_{\text{ref}})}. \quad (3.4)$$

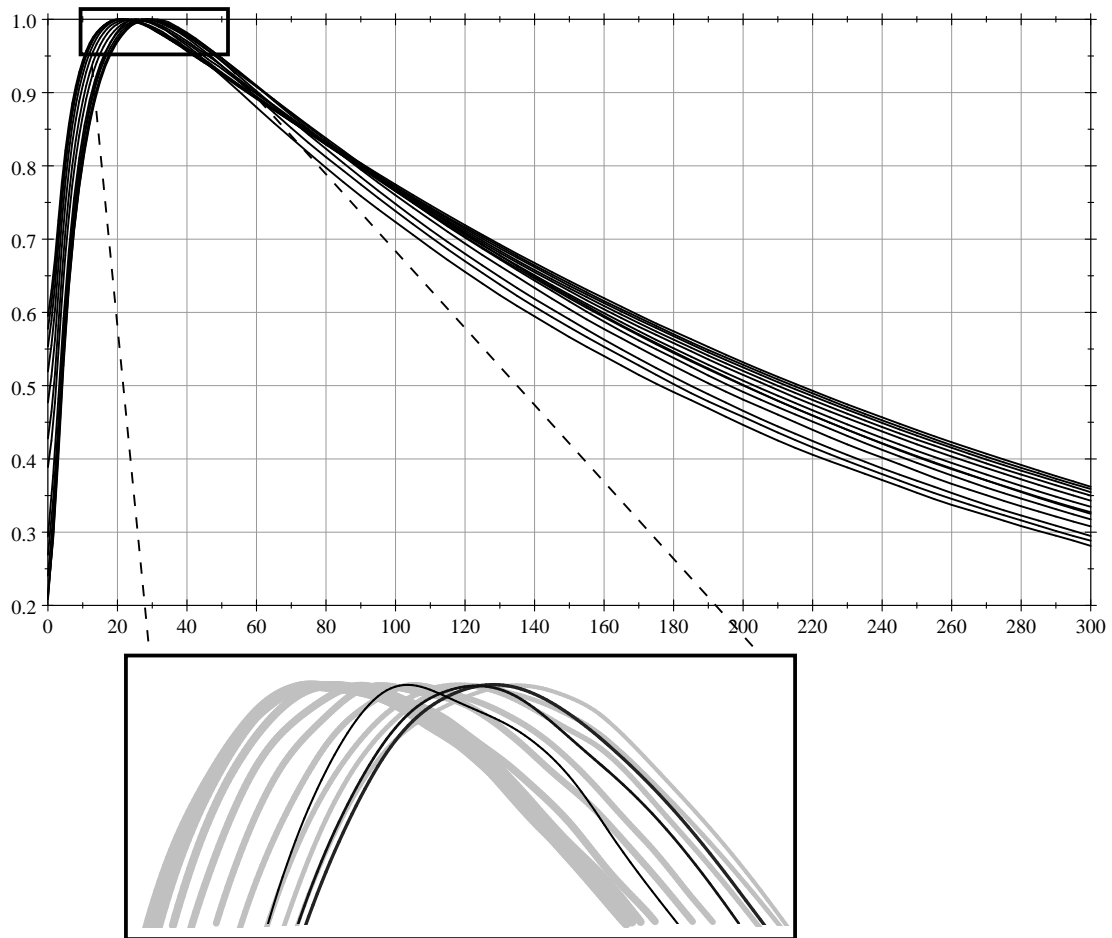


Abbildung 3.2: Typische PDDs bei 15MV und Feldgrößen von 2cm bis 40cm. Aufgetragen ist die (im Maximum auf 1 normierte) Dosis gegenüber der Messtiefe (in [mm]). In der Vergrößerung des Maximumbereiches sind zur besseren Unterscheidbarkeit die Kurven mit steigender Feldgröße zunehmend dick dargestellt. Die schwarzen Kurven beziehen sich auf die kleinsten Felder (Feldgröße: 2cm, 3cm, 4cm).

Auch diese Angabe erfolgt jeweils für eine feste Feldgröße s . Durch die isozentrische Geometrie hat die TPR direkte praktische Bedeutung bei einfachen Dosisberechnungen ohne Planungssystem.

Eine Variante dazu stellt das **TMR** (Tissue-Maximum-Ratio) dar:

$$\text{TMR}(s, d) = \frac{D(s, d)}{D(s, d_{\max})}. \quad (3.5)$$

Der Dosiswert wird hier also in Relation gesetzt zum Dosiswert in der nominalen Maximumtiefe.

Über tabellierte Werte für PDD und vor allem für TPR zu verfügen ist wichtig, um Dosisberechnungen von Hand durchführen zu können. Im Sinne einer höchstmöglichen Zuverlässigkeit ist man auf der sicheren Seite, wenn diese Werte unabhängig voneinander direkt gemessen werden; moderne Messmittel bieten dafür die Möglichkeit. Die **Umrechnung von PDD in TPR** kann aber zumindest zur Kontrolle der Konsistenz der Messwerte interessant sein:

Der Dosiswert in einer gewissen Wassertiefe d im Phantom hängt ab von der

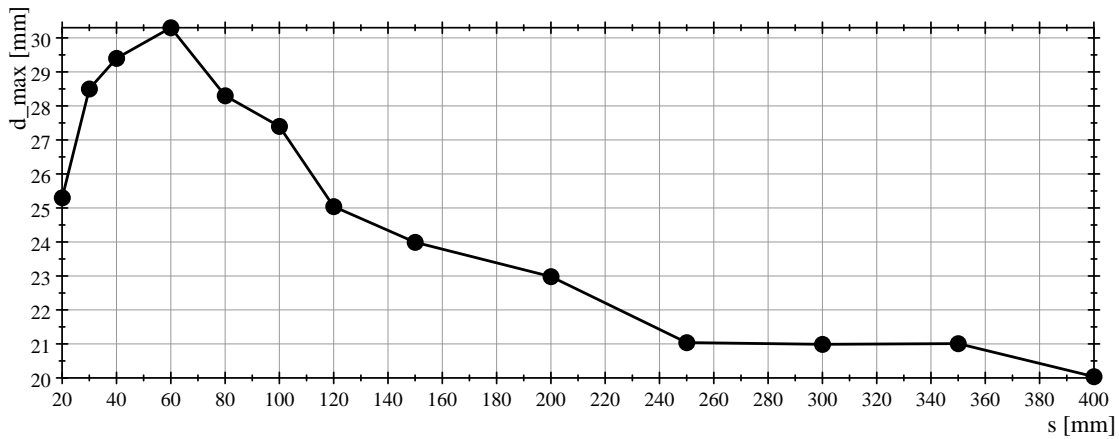


Abbildung 3.3: Gemessene Maximumtiefe in Abhängigkeit von der Feldgröße [mm].

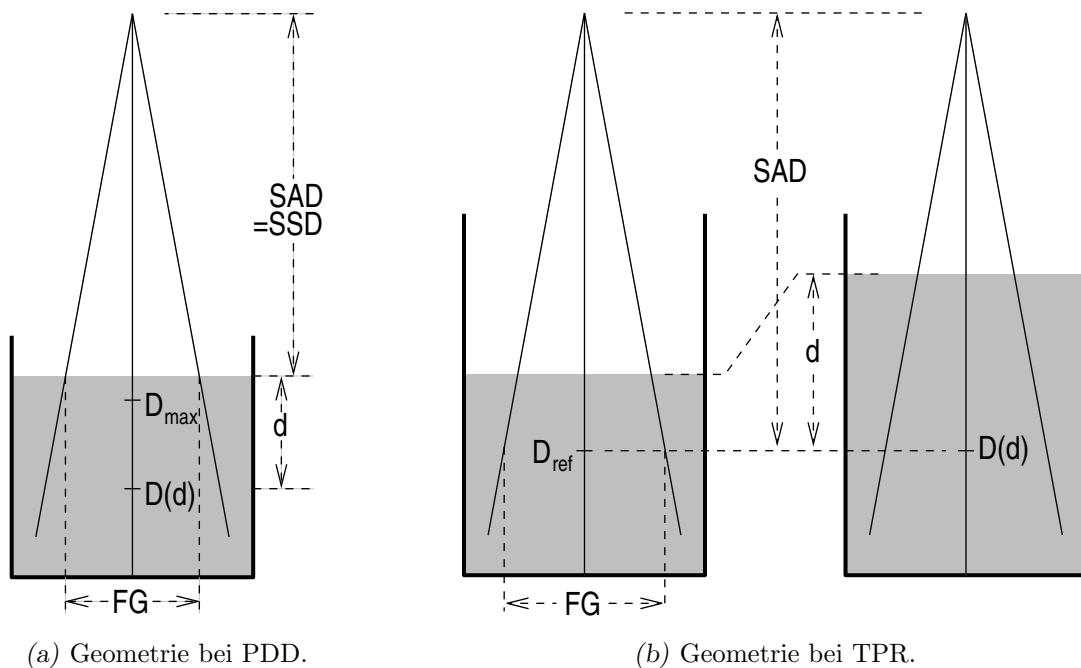


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der geometrischen Konzepte zur Beschreibung der Tiefendosis in einem Wasserphantom (d: Messtiefe, FG: Feldgröße, SAD: Source–Axis–Distance, SSD: Source–Surface–Distance).

- der Schwächung im Medium (Wasser);
- der Strahldivergenz;
- der Streuung (von der man empirisch weiß, dass sie primär von der Feldgröße in der Messtiefe, und kaum von der Divergenz bestimmt ist [38]).

Der hauptsächliche Unterschied zwischen PDD und TPR besteht in der Strahldivergenz. Um zu einem Ansatz für eine Umrechnung zu gelangen, macht es Sinn, zu einer divergenzfreien Darstellung überzugehen:

$$\text{PDD}(s, d) \longrightarrow \text{PDD}(s, d) \cdot \left(\frac{f + d}{f} \right)^2 \quad (\text{mit } f := \text{SSD} = \text{SAD}).$$

Für einen solchermaßen konstruieren „Parallelstrahl“ (d.h. quasi-divergenzfrei) kann der Tiefendosisverlauf *näherungsweise* formuliert werden als:

$$D(s, d) \approx D_0 \cdot \frac{\text{PDD}(s, d)}{100} \cdot \left(\frac{f + d}{f} \right)^2; \quad (3.6)$$

dies gilt nur näherungsweise deshalb, weil mit Blick auf Streuung nicht ganz klar ist, was die effektive Feldgröße des „Parallelstrahls“ tatsächlich sein soll, und außerdem Divergenzfreiheit in dieser Formulierung strenggenommen nur für den Zentralstrahl gilt. Abgesehen davon sind dann mit der Divergenzfreiheit die Unterschiede zwischen PDD und TPR verschwunden, und man kann ansetzen:

$$\text{TPR}(s, d) = \frac{D(s, d)}{D(s, d_{\text{ref}})} \approx \frac{\text{PDD}(s, d)}{\text{PDD}(s, d_{\text{ref}})} \cdot \left(\frac{f + d}{f + d_{\text{ref}}} \right)^2. \quad (3.7)$$

3.3 Dosisquerprofil

Querprofile geben den Dosisverlauf in einer festen Tiefe längs einer Geraden durch die Feldmitte an. Die Idealform eines Querprofils ist – unabhängig von der Tiefe – ein Rechteck; allein schon wegen der punktförmigen Strahlquelle und der damit verbundenen Strahldivergenz ist dies aber nicht realisierbar. Ein weiterer Grund stellt die unterschiedliche Strahlqualität innerhalb eines Strahls dar: Mit zunehmendem Abstand vom Zentralstrahl durchläuft die Strahlung einen kürzeren Weg im Ausgleichsfilter; die Vorfilterung nimmt also ab, die Strahlung wird im Vergleich zum Zentralstrahl immer weicher und damit weniger durchdringend. Ein einigermaßen flaches Plateau ist folglich nur in einer einzigen Tiefe möglich und wird typischerweise für die Tiefe $d = 10\text{cm}$ eingestellt. Für größere Tiefen nimmt der Wert zum Profilrand hin ab, während umgekehrt für geringere Tiefen der Wert dort eher zunimmt und das Profil die charakteristischen „Ohren“ oder „Hörner“ zeigt. Man spricht dann von *overflattening*. Beispiele für Dosisquerprofile sind in Abbn. 3.5 und 3.6 in unterschiedlichen Darstellungen gezeigt.

3.4 Faktoren zur Dosisbeschreibung

Zur spezifischen Beschreibung der Dosis gibt es eine Reihe von empirischen Faktoren, die im Wesentlichen auf eine konzeptionelle Trennung von Primär- und Streustrahlung abzielen. Dabei sind auch Größen enthalten, die auf einer Dosismessung in Luft beruhen und wohl noch aus der ^{60}Co -Zeit der Strahlentherapie stammen. Mit „Messungen frei Luft“ soll typischerweise der Dosisanteil festgestellt werden, der *nicht* von Phantomstreuung stammt. Soll dies in Relation zu einer entsprechenden Phantommessung gesetzt werden, wird dazu in der Geometrie des Phantoms (d.h. in der Tiefe der Dicke des Aufbaubereiches) gemessen. Die Messkammer wird also von einer Aufbaukappe umgeben in der Art, dass in gleicher Weise Sekundärelektronengleichgewicht erzeugt und der Primärstrahl geschwächt wird, wie bei Messung im Phantom in Maximumtiefe. Dies ist aber nur bis zu einer Energie von ca. 3MV möglich; bei höheren Energien müsste die Aufbaukappe so dick ausgelegt werden, dass deren Streustrahlung nicht mehr ignoriert werden kann. Sinnvolle Werte von Größen bzgl. Messungen frei Luft sind dann höchstens noch indirekt und mit Aufwand möglich [39]. Im Folgenden steht P für die mittels Messung frei Luft von der Primärstrahlung erzeugte Dosis (d.h. ohne Phantomstreuung) und D für die Gesamtdosis am Messort.

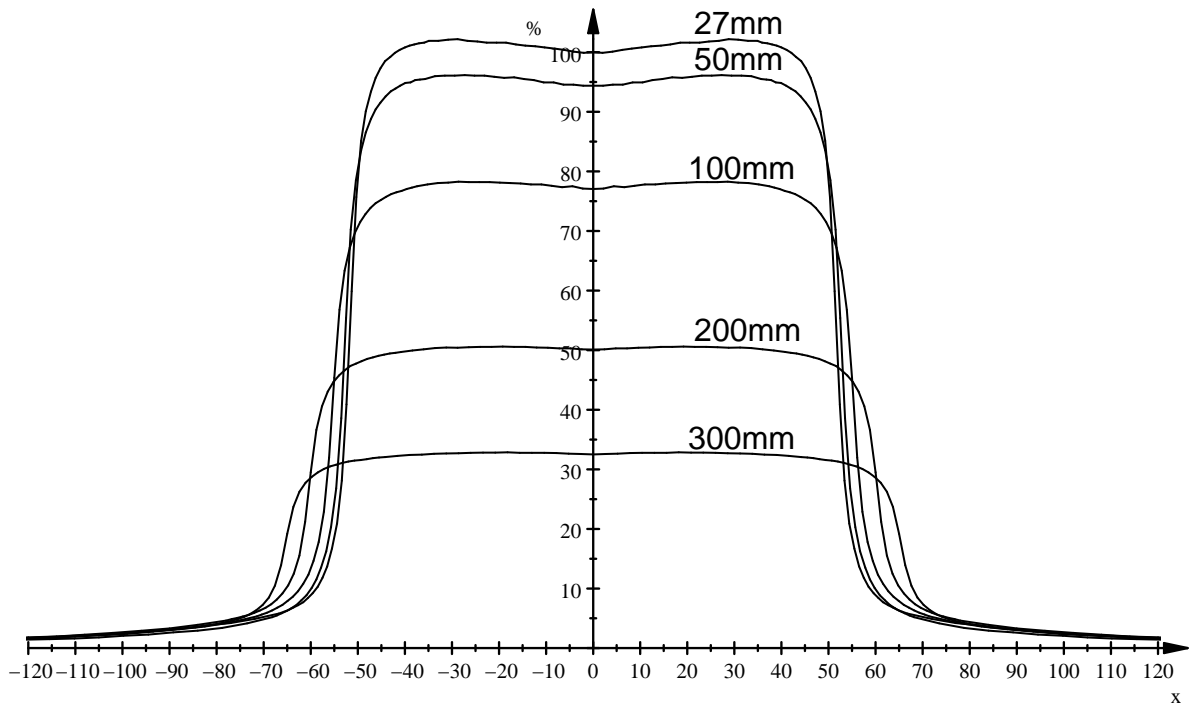


Abbildung 3.5: Dosisquerprofile, wie sie sich in der direkten Messung darstellen. Abgestrahlt ist ein $10 \times 10\text{cm}^2$ -Feld bei 15MV und SSD=100cm. Im Bild bezeichnet sind die einzelnen Messtiefen. Wegen der geometrischen Strahldivergenz nehmen die Halbwertsbreiten mit der Tiefe zu.

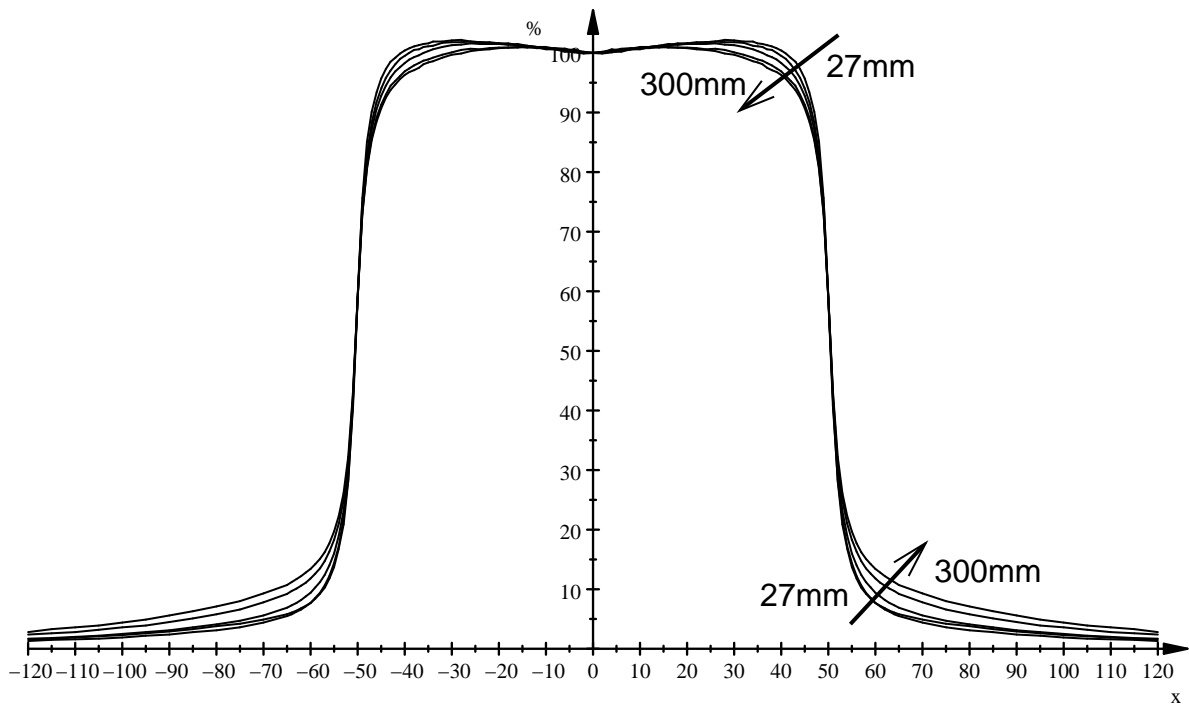


Abbildung 3.6: Die selben Profile wie in Abb. 3.5, aber einheitlich normiert und divergenzkorrigiert. Durch Zunahme der Streuung mit der Tiefe zeigt sich eine Verunschärfung des Profils.

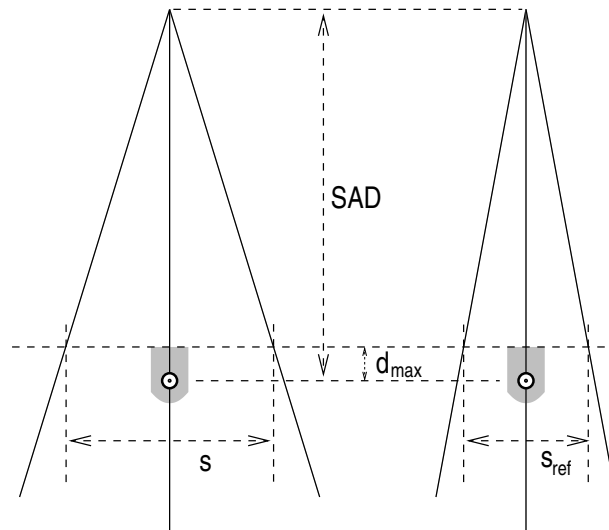


Abbildung 3.7: Geometrie zur Bestimmung des CF.

Collimator Factor:

$$CF(s) = \frac{P(s)}{P(s_{\text{ref}})}. \quad (3.8)$$

Die Referenzfeldgröße s_{ref} beträgt 10cm. Der CF beschreibt also die relative Dosisänderung am Zentralstrahl, die sich lediglich durch Variation des Blendensystems ergibt (Abb. 3.7). Im Wesentlichen ist diese Änderung bedingt durch:

- Streustrahlung von den Blenden,
- Streustrahlung vom Ausgleichsfilter,
- Rückstreuung von den Blenden in die Monitorkammern.

Streustrahlung von Strahlerkopfkomponenten zählt grundsätzlich zur Primärstrahlung!

Peak Scatter Factor:

$$PSF(s) = \frac{D(s, d_{\text{max}})}{P(s)}. \quad (3.9)$$

Der PSF bringt die durch Phantomstreuung bedingte Dosisänderung in der Maximumstiefe zum Ausdruck (Abb. 3.8). Er findet Anwendung für Energien $E > 400\text{kV}$, für Energien $E < 400\text{kV}$ wird der PSF zum BSF (Back Scatter Factor), der an der Phantomboberfläche gemessen wird, da dann die Maximumstiefe bei 0cm liegt. Wesentlich ist, dass die Aufbaukappe bei der Messung frei Luft dieselbe Schwächung am Messort bewirkt wie im Phantom.

Normalized Peak Scatter Factor:

$$NPSF = \frac{PSF(s)}{PSF(s_{\text{ref}})}. \quad (3.10)$$

Die Referenzfeldgröße beträgt auch hier wieder $s_{\text{ref}} = 10\text{cm}$. Der NPSF findet speziell bei hochenergetischer Photonenstrahlung Anwendung, wo der PSF mit einem unerwünschten Streufaktor aus dem Aufbaumaterial behaftet ist; dieser Streufaktor hebt sich im Quotienten näherungsweise weg [39].

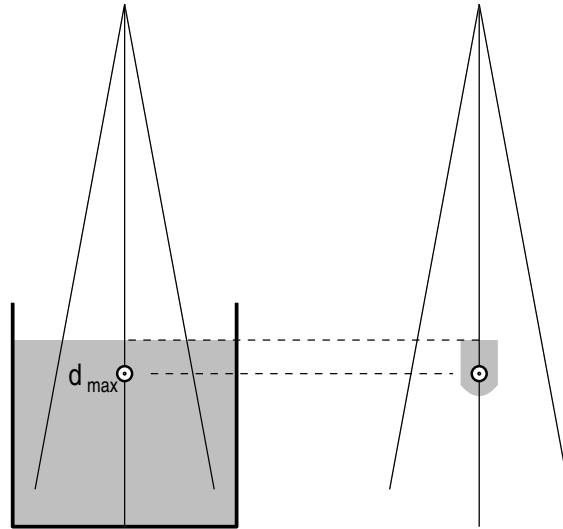


Abbildung 3.8: Geometrie zur Bestimmung des PSF.

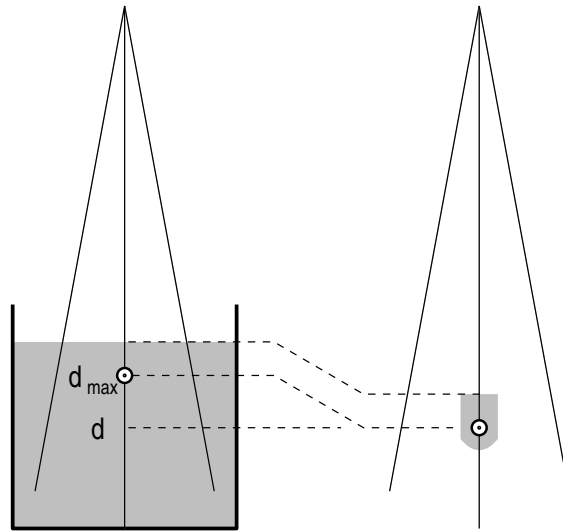


Abbildung 3.9: Geometrie zur Bestimmung des TAR.

Tissue Air Ratio:

$$\text{TAR}(s, d) = \frac{D(s, d)}{P(s, d_{\max})}. \quad (3.11)$$

Das TAR stellt die Dosis in einer Tiefe d im Phantom in Relation zur Messung frei Luft im identischen Abstand zur Quelle, aber dennoch in der Maximumtiefe. Diese etwas kompliziert anmutende Definition (nach [40]) soll sicherstellen, was als definierte Festlegung gilt, nämlich dass in Maximumtiefe TAR und PSF identisch sind:

$$\text{TAR}(s, d_{\max}) = \text{PSF}(s). \quad (3.12)$$

Mit Gln. (3.5) und (3.9) ergibt sich der Zusammenhang:

$$\text{TAR}(s, d) = \frac{D(s, d)}{P(s, d_{\max})} \cdot \frac{D(s, d_{\max})}{D(s, d_{\max})} = \text{TMR}(s, d) \cdot \text{PSF}(s). \quad (3.13)$$

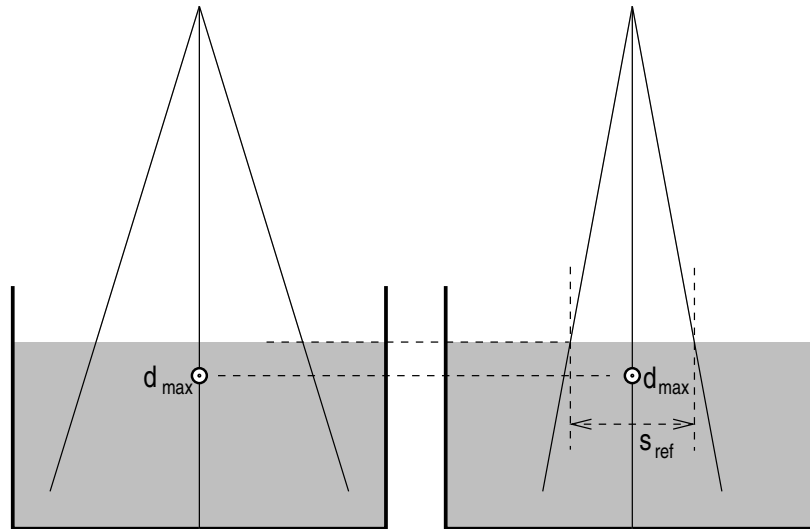


Abbildung 3.10: Geometrie zur Bestimmung des OPF.

OutPut Factor:

$$\text{OPF}(s) = \frac{D(s, d_{\max})}{D(s_{\text{ref}}, d_{\max})}. \quad (3.14)$$

Die Messanordnung für die output-Faktoren ist in Abb. 3.10 dargestellt. Die Referenz-Feldgröße ist wieder 10cm. Die Messung muss nicht wirklich in Maximumtiefe erfolgen, sondern zwingend *mindestens* in Maximumtiefe, um Elektronenkontamination auszuschließen. Für Messung im Maximum findet man mit den Gln. (3.8) und (3.9) den interessanten Zusammenhang:

$$\text{OPF}(s) = \frac{D(s, d_{\max})}{D(s_{\text{ref}}, d_{\max})} = \frac{P(s)\text{PSF}(s)}{P(s_{\text{ref}})\text{PSF}(s_{\text{ref}})} = \text{CF}(s) \cdot \text{NPSF}(s). \quad (3.15)$$

3.5 Konzept der äquivalenten Feldgröße

Größen zur Beschreibung der Tiefendosis (z.B. PDD, Kap. 3.2) hängen offensichtlich nicht nur von der Feldgröße ab, sondern auch von der Feldform. Gemessen werden Tiefendosiscurven normalerweise nur für quadratische Felder. Um ohne weitere Messungen davon abweichende Feldformen verwenden zu können, gibt es das Konzept der äquivalenten Feldgröße: Die zu einem beliebigen Feld äquivalente Feldgröße ist definiert als die Seitenlänge eines quadratischen Feldes, das im Zentralstrahl dieselbe Tiefendosischarakteristik besitzt. Besonders brauchbar in der klinischen Routine wird dieses Konzept vor allem, weil für diese Zuordnung (z.B. für rechteckig \rightarrow quadratisch) jeweils nur eine einzige (!) Tabelle notwendig ist. Natürlich beruht dies auf den Annahmen, dass eine solche Zuordnung gilt:

- unabhängig von der Tiefe,
- unabhängig von der Strahlqualität, insbesondere von der Energie,
- unabhängig von der Strahldivergenz.

Die Gültigkeit dieser Annahmen ist offenbar im Rahmen der in der Praxis geforderten Genauigkeit tatsächlich gegeben. Tabellen für die Umrechnung finden sich z.B. in [41].

Darüber hinaus gibt es eine Reihe von Näherungsformeln für die *Berechnung* der äquivalenten Feldgröße σ . Die wohl gebräuchlichste lautet:

$$\sigma = \frac{2ab}{a+b}; \quad (3.16)$$

man verwendet dafür die Bezeichnung „4A/P“ (4×area/perimeter) bzw. „Day’s rule“ bzw. „Sterling-Formel“ (nicht zu verwechseln mit der Stirling-Formel aus Kap. 1.5.1). Wegen $\lim_{a \rightarrow \infty} \sigma = 2b$ folgt, dass die kleinere der beiden Seiten stets größer als $\sigma/2$ ist.

Die 4A/P-Formel soll hier nicht hergeleitet, aber doch wenigstens etwas plausibel gemacht werden:

Der alleinige Grund, weshalb Feldgrößen und -formen für die Dosis überhaupt eine Rolle spielen, ist Streuung. Der durch Streuung bedingte Dosisanteil am Ort des Zentralstrahls eines kreisförmigen Feldes kann offenbar gut genähert werden mit der „model scatter-radius function“ [41]:

$$S(r) = S_{\infty} \cdot (1 - e^{-\lambda r} - \mu \lambda r e^{-\lambda r}); \quad (3.17)$$

dabei bezeichnet r den Feldradius, S_{∞} den Streuanteil für $r \rightarrow \infty$, μ und λ sind Fit-Parameter. Für 6MV-Strahlung ergibt sich $\mu = 0$, was den Ausdruck wesentlich vereinfacht. Als weiteren tabellierten Parameter findet man in der Literatur $r_{1/2}$, der Radiuswert, bei dem der Streuanteil gerade die Hälfte beträgt ($S(r_{1/2}) = S_{\infty}/2$). Damit lautet die Streu-Radius-Funktion für 6MV:

$$S(r) = S_{\infty} \cdot (1 - 2^{-r/r_{1/2}}) = S_{\infty} \cdot (1 - e^{-(r \ln 2)/r_{1/2}}) = S_{\infty} \cdot (1 - e^{-\lambda r}) \quad (3.18)$$

mit $r_{1/2} = 4.6 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = \ln 2 / 4.6 \text{ cm} \approx 0.151 \text{ cm}^{-1}$. Diese radialsymmetrische Streu-Radius-Funktion muss sich grundsätzlich berechnen aus:

$$S(r) = 2\pi \int_0^r s(\rho) \rho d\rho, \quad (3.19)$$

d.h. aus der Flächenintegration sozusagen über eine „Streu-Dichte“ $s(r)$, die sich mit Gl. (3.18) – also für 6MV-Strahlung – ergibt zu:

$$s(r) = \frac{S_{\infty} \lambda}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\lambda r}}{r} \Rightarrow s(x, y) = \frac{S_{\infty} \lambda}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\lambda \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.20)$$

Um also den Streuanteil $S(A)$ am Zentralstrahl eines beliebigen Feldes zu erhalten, ist zu berechnen:

$$S(A) = \frac{S_{\infty} \lambda}{2\pi} \iint_A \frac{e^{-\lambda \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy. \quad (3.21)$$

Damit lässt sich nun die Gültigkeit von Gl. (3.16) testen: Werden bei einem rechteckigen Feld die Seitenlängen a und b so gewählt, dass sich ein festes σ ergibt (also a und σ vorgeben $\Rightarrow b_{\sigma}(a) = a\sigma/(2a - \sigma)$), dann sollte das Integral nur noch von σ abhängen, also:

$$\int_a^{\infty} \int_{b_{\sigma}(a)}^{\infty} \frac{e^{-\lambda \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = C_{\sigma} \quad \left(\text{für bel. } a > \frac{\sigma}{2} \right). \quad (3.22)$$

Dieses Integral lässt sich numerisch berechnen; Abb. 3.11 zeigt das Ergebnis für verschiedene Werte von σ . Wie man sieht, bestätigt sich im Wesentlichen die Unabhängigkeit von a und die Konstanz des Integrals.

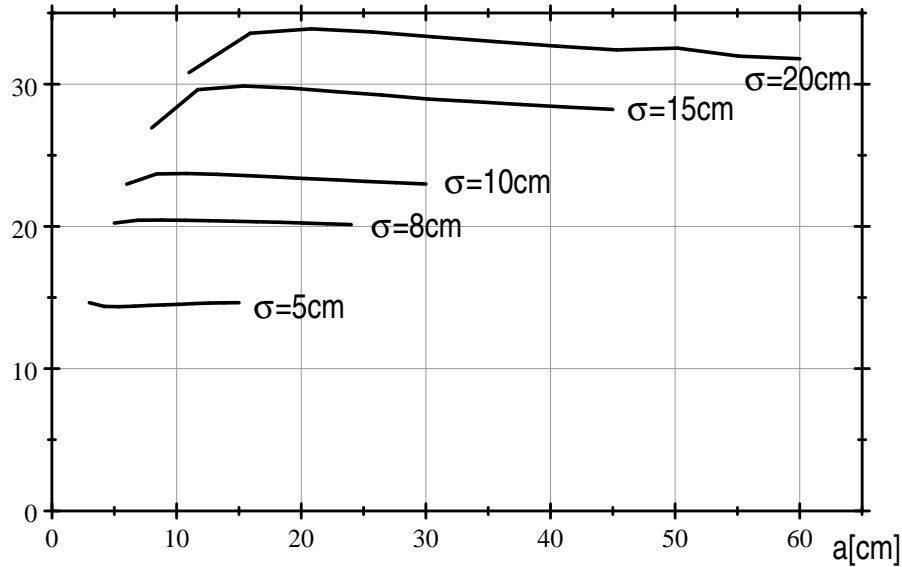


Abbildung 3.11: Streuanteil (in beliebigen Einheiten) im Zentralstrahl für variable Seitengröße a bei jeweils festgehaltener äquivalenter Feldgröße σ .

3.6 Äquivalente Feldgröße und Output-Faktoren

Eine wichtige Messgröße bei der Kommissionierung von Planungssystemen sind die Output-Faktoren (Kap. 3.4). Output-Faktoren müssen dazu nicht nur für quadratische, sondern auch für rechteckige Felder bestimmt werden. Die Seitengrößen liegen dabei typischerweise im Bereich von 2cm bis 40cm; es sind somit auch extrem elongierte Felder enthalten.

Man kann den Output-Faktor eines Feldes gegen dessen äquivalenter Feldgröße auftragen; dabei würde man sich wünschen, dass alle Punkte auf einer glatten Kurve liegen, da dann einerseits Messfehler sofort erkannt und andererseits fehlende Zwischenwerte leicht berechnet werden könnten. Leider trifft dies nicht zu, vor allem aufgrund der bemerkenswerten Tatsache, dass die beiden Blendenysteme nicht gleichwertig sind: Ein Feld der Größe $A \times B$ liefert i.Allg. (d.h. für $A \neq B$) einen leicht verschiedenen Output-Faktor gegenüber einem Feld $B \times A$. Wie in Gl. (3.15) gezeigt, ist im Output-Faktor wesentlich der Collimator-Faktor enthalten, d.h. Streuvorgänge im Strahlerkopf spielen eine hauptsächliche Rolle: Die Blendenpaare für die x- und y-Feldbegrenzung unterscheiden sich in ihrem Abstand zum Fokus, und so ist es naheliegend, dass dies den entscheidenden Unterschied macht.

In [42] werden deshalb Korrekturfaktoren zu den Feldgrößen vorgeschlagen, die jeweils vom Abstand Fokus-Blendenpaar abhängen. Diese Abhängigkeit wird in der einfachsten Form angesetzt, nämlich linear. Die 4P/A-Gleichung (3.16) für die äquivalente Feldgröße lautet in der so korrigierten Weise:

$$\sigma_{\text{corr}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{2 \cdot (f_A A) \cdot (f_B B)}{f_A A + f_B B} \quad \text{mit} \quad N := \frac{2f_A f_B}{f_A + f_B}. \quad (3.23)$$

Die Korrekturfaktoren f_A und f_B sind direkt die Abstände Fokus-Blendenpaar, der Faktor N normiert diesen Ausdruck um sicherzustellen, dass für $A = B$ keine Korrektur erfolgt. Keine Korrektur ergibt sich außerdem für $f_A = f_B$. (Ein linearer Ansatz bedeutet eigentlich zunächst, einen Korrekturfaktor der Form $c_{A,B} = a f_{A,B}$ anzusetzen. Tatsächlich wird in [42] $a = 0.01$ verwendet; durch die Normierung

fällt ein solcher Proportionalitätsfaktor aber grundsätzlich weg.) In Abb. 3.12 sind die Ursprungsdaten und die korrigierten Werte am Beispiel einer konkreten Maschine aufgetragen. Vor allem im Bereich $\sigma > 4\text{cm}$ ist durch die Korrektur eine deutliche Annäherung an eine Kurve zu erkennen. Für kleinere Werte von σ trifft das – in diesem Beispiel – so nicht zu.

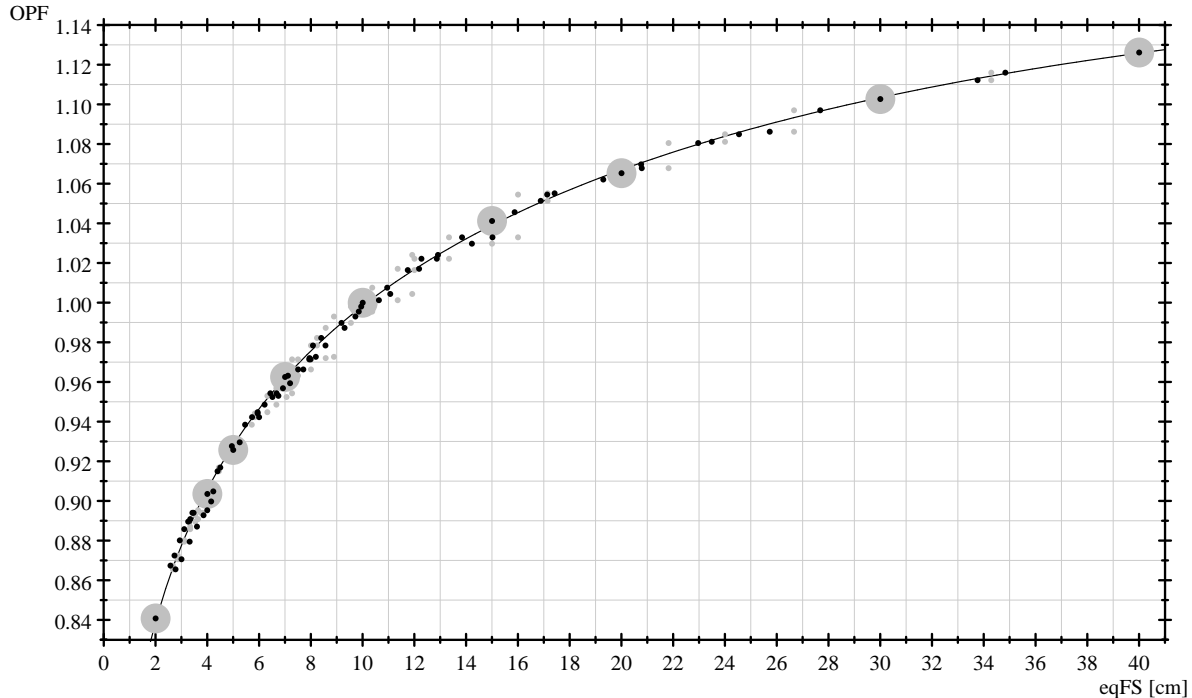


Abbildung 3.12: Werte für einen VarianTM-Clinac (mit $f_A = 44.44\text{cm}$, $f_B = 35.66\text{cm}$) bei 6MV. Aufgetragen sind die Output-Faktoren gegen die unkorrigierten (grau) und korrigierten (schwarz) Werte der äquivalenten Feldgröße. Die grau umrandeten Punkte kennzeichnen die quadratischen Felder. Da die Korrektur sich auf die Feldgröße bezieht, wirkt sie nur in horizontaler Richtung. Die durchgehende Linie zeigt die angefittete Hoerl-Kurve (Gl. (3.24) mit $a = 0.7769$, $b = 0.9987$, $c = 0.1144$).

Es muss ausdrücklich betont werden, dass es sich bei Gl. (3.23) *nicht* um eine „verbesserte“ Version einer Formel für die äquivalente Feldgröße handelt, sondern sie lediglich dazu dient, die Messpunkte auf eine einheitliche Kurve zu bringen.

Ist man mit diesem Ergebnis zufrieden, kann eine analytische Darstellung dieser Kurve gesucht werden. Dafür genügen die Werte der quadratischen Felder. Offenbar eignet sich als Fit-Funktion besonders die Form:

$$y(x) = a \cdot b^x \cdot x^c \quad (\text{„Hoerl-Kurve“}). \quad (3.24)$$

3.7 Analytische Beschreibung der TPR

Eine analytische Form des TPR ist nicht nur sinnvoll, weil dies die Abhängigkeit von Einzelmessungen mildert, die ja stets der typischen Problematik des Messens (Rauschen, Ausreißer, Diskretisierung, etc.) unterworfen ist. Vor allem gewährt eine geeignete analytische Form Einblicke in Details der Abhängigkeit von den relevanten Variablen und Parametern, die weit über die reinen Zahlenwerte hinausgehen.

Im Folgenden wird dazu der Ansatz von Sauer und Wilbert [43] gezeigt. Um die Dinge – vor allem mit Blick auf den nachfolgenden Anfit–Prozess – so einfach wie möglich zu halten, werden alle vorkommenden Größen als *dimensionslos* angesehen. Die analytische Darstellung des TPR ist eine Funktion, abhängig von der Feldgröße s und der Tiefe d im Medium, und besteht aus einem Produkt von drei Termen:

$$\text{TPR}(s, d) = \alpha \cdot (D_0 + (1 - D_0)(1 - \beta^d)) \cdot e^{-\mu(1-\eta d)d}. \quad (3.25)$$

Diese Terme können unschwer interpretiert werden:

- α ist ein Normierungsfaktor, um sicherzustellen, dass sich für die Referenztiefe tatsächlich $\text{TPR}(s, d_{\text{ref}}) = 1$ ergibt.
- $(D_0 + (1 - D_0)(1 - \beta^d))$ gibt den *Aufbaufaktor* an und soll für geringe Tiefen den Aufbaueffekt nachbilden; D_0 bezeichnet dabei eine Maßzahl für die Dosis an der Oberfläche (also: $D_0 < 1$). Die Variable β stellt den sog. *Aufbaugradienten* dar, mit $0 < \beta < 1$, d.h. mit zunehmender Tiefe d gilt $\beta^d \rightarrow 0$, was zum Verschwinden des Aufbaufaktors ($(\dots) \rightarrow 1$) aus dem TPR–Produkt führt.
- $e^{-\mu(1-\eta d)d}$ beschreibt die Abnahme der Dosis mit der Tiefe d . Im Wesentlichen steckt darin der Faktor $e^{-\mu d}$, der die bekannte exponentielle Abnahme charakterisiert, wie man wohl naiverweise ansetzen würde. μ steht also für den Schwächungskoeffizienten, der sich aber tatsächlich mit der Tiefe ändert. Diese Änderung wird mit dem Korrekturfaktor $1 - \eta d$ angesetzt. Damit besitzt η die Bedeutung eines *Strahlaufhärtungskoeffizienten*.

In einem ersten Schritt wird der Ausdruck (3.25) an die TPR–Messwerte angefitet und so die Parameter $\alpha, \beta, \mu, \eta, D_0$ bestimmt. Wie sich herausstellt, sind diese Größen in sehr guter Näherung *nur* von der Feldgröße s abhängig – und *nicht* von der Messtiefe d . Diese Abhängigkeiten können mit den folgenden Funktionen nachgebildet werden:

- $\beta(s) = \beta_0 \cdot (1 - \beta_1^s) + \beta_2 s$; die Größen $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ stellen Konstanten der Strahlqualität dar. Die Funktion soll/wird ein Maximum besitzen, es wird sich also zeigen: $\beta_1 < 1, \beta_2 < 0$.
- $\alpha(s), \mu(s), \eta(s)$ können jeweils beschrieben werden in der Form

$$y(s) = y_0 + y_1 e^{-s/y_2}, \quad (y \text{ steht für } \alpha, \mu, \eta).$$

- Für $D_0(s)$ kann keine so klare Abhängigkeit erkannt oder angegeben werden; der Wert bewegt sich aber in einem einigermaßen beschränkten Bereich; deshalb kann der Einfachheit halber der Mittelwert genommen werden. Dies ist zwar eine grobe Näherung, wird aber gemildert durch den Umstand, dass D_0 für Tiefen jenseits des Maximums ohnehin keine Rolle mehr spielt.

Diese von s abhängigen Größen können in verschiedenen Tiefen gemessen und darüber gemittelt werden.

In einem zweiten Schritt werden schließlich die gesuchten Sätze von Parametern $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2], [\beta_0, \beta_1, \beta_2], [\mu_0, \mu_1, \mu_2], [\eta_0, \eta_1, \eta_2]$ und D_0 durch Anfiten der jeweiligen Einzelfunktionen an die Fit–Ergebnisse des ersten Schritts bestimmt.

Im Ergebnis sind die folgenden Feststellungen bemerkenswert:

- Da $\beta(s)$ ein Maximum bei \hat{s} besitzt, ist bei dieser Feldgröße der Aufbaubereich am ausgeprägtesten. Die Autoren geben dafür eine Feldgröße von $\hat{s} = 4\text{cm}$ an. Dies entspricht genau dem Sachverhalt, wie er in Kap. 3.2 beschrieben ist.
- Für Feldgrößen $s > 1.5\text{cm}$ wird der Koeffizient der Strahlaufhärtung η negativ. Es tritt also sozusagen ein Effekt der „Strahlaufweichung“ ein. Erklärt werden kann dies mit der Zunahme der Streustrahlung mit der Tiefe.
- Für $s \rightarrow 0$ verschwindet der Aufbaufaktor, was aber nicht realistisch ist (z.B. wegen Elektronenkontamination). Aus dem Messwerten wird für diesen Fall $\beta(s = 0) = 0.02$ angegeben (durch Extrapolation empirisch bestimmt).

Kapitel 4

Betrachtung der Dosisdeponierung als LTI-System

Durch eine Reihe von Effekten von Strahlung in einem Medium ergibt sich eine tiefenabhängige Verunschärfung der Dosisverteilung gegenüber der rein geometrischen Form der Primärfluenz. Diese Verunschärfung kann gut als LTI-System (Kap. 1.6.1) modelliert werden – zumindest solange man sich auf homogene Medien beschränkt. Dies ist auch das Grundprinzip von allen Dosisberechnungsalgorithmen vom Typ „pencil beam“. Um qualitative Einsichten gewinnen und Abschätzungen vornehmen zu können, sind *analytische* Streukerne von besonderem Interesse, da sie mit „Papier und Bleistift“ gut zugänglich sind.

4.1 Fluenz–Dosis–Faltungskern

Eine Möglichkeit, einen einigermaßen realistischen Faltungskern zu erhalten, ist die Monte–Carlo–Berechnung. Für die folgenden Darstellungen wurde eine sehr vereinfachte Implementierung verwendet [44], die aber für die qualitativen Betrachtungen hier völlig ausreicht. In Abb. 4.1 sind solche Kerne (bzw. Punktspreizfunktionen, psf) dargestellt.

Oft interessiert das laterale Dosisprofil, das sich aus einem Fluenzprofil ergibt. Dafür benötigt man eine (dann tiefenabhängige) 2dim. Punktspreizfunktion, die ebenso mit Monte–Carlo berechnet werden kann (Abb. 4.2). Die zugehörige Linienpreizfunktion (lsf) ist eine eindimensionale Projektion davon (Abel–Transformation, Gl. (1.291)). Interessanterweise zeigt sich, dass sich eine solche lsf auffallend gut mit einer Summe aus zwei Lorentzfunktionen (vgl. 1.97) anfitzen lässt (Abb. 4.3):

$$\text{lsf}(x) \approx \alpha_1 \frac{1}{\pi \lambda_1} \cdot \frac{1}{1 + (x/\lambda_1)^2} + \alpha_2 \frac{1}{\pi \lambda_2} \cdot \frac{1}{1 + (x/\lambda_2)^2}; \quad (4.1)$$

die λ_i sind die Formparameter, die α_i die Gewichtungen der einzelnen Lorentzfunktionen (die normiert sind, es gilt also $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$). Alle diese Parameter sind energie- und tiefenabhängig. In Abb. 4.4 sind die sich durch das Anfitzen ergebenden Formparameter dargestellt; wie sich zeigt, unterscheiden sie sich (für jeweils eine Energie und Tiefe) um etwa eine Größenordnung, wobei die großen Werte (für den breiten Anteil) deutlich stärker gewichtet sind. Die ist in Abb. 4.5 zu erkennen.

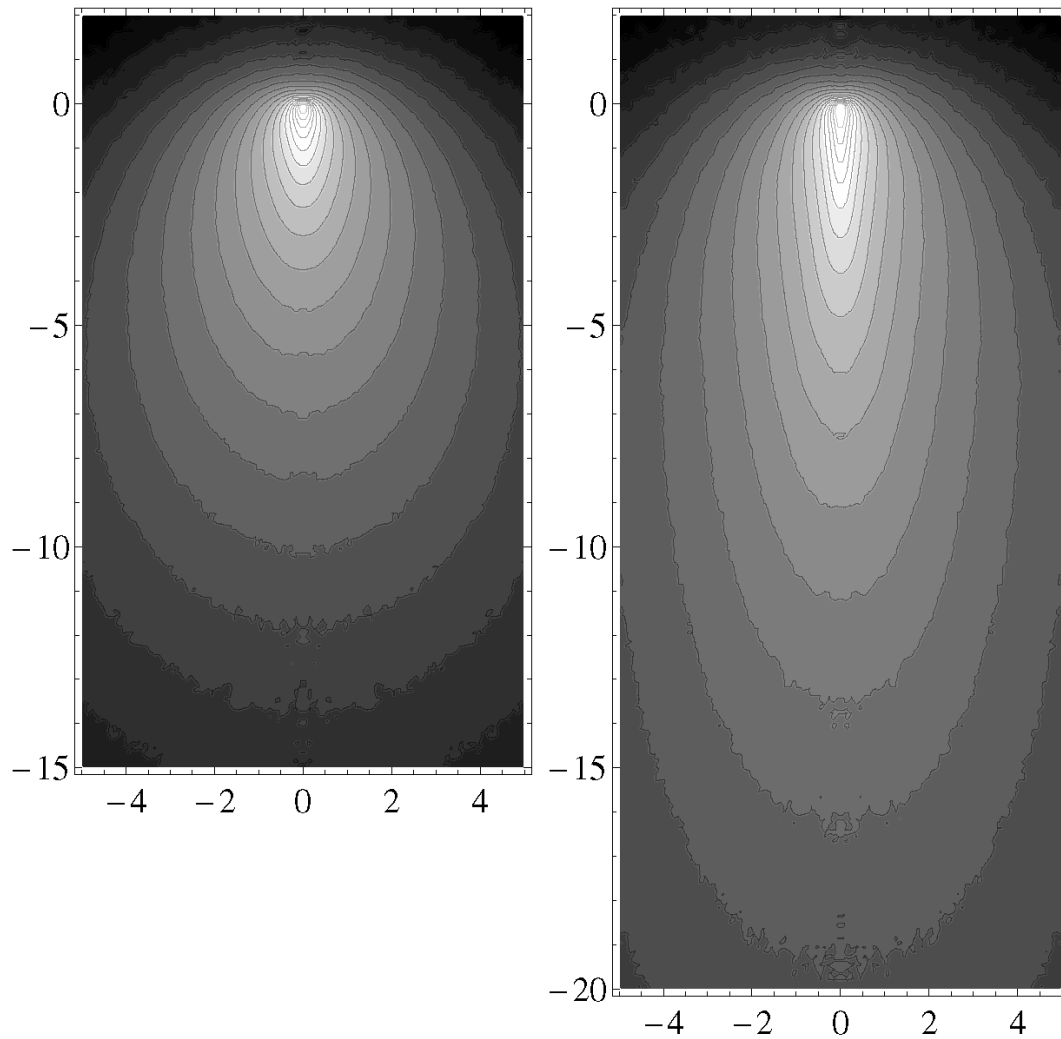


Abbildung 4.1: Schnittbild durch den 3dim. Faltungskern in Wasser (links: 6X, rechts: 15X), wie er sich aus einer Monte-Carlo-Rechnung ergibt (lateral und in der Tiefe). Die Darstellung ist logarithmisch, d.h. die Isodosen unterscheiden sich jeweils um einen konstanten Faktor, der Anstieg zum Zentrum ist also sehr steil. (Längenangaben in [mm].)

Dies gilt allerdings nur für den reinen Kern bzgl. (Fluenz \rightarrow Dosis). Da aber stets eine Reihe weiterer Komponenten für Verunschärfungen wirksam sind, steht zu vermuten, dass die schmalen Anteile (die kleineren λ -Werte) weiter an Gewicht verlieren und dann eine solche Linienspreizfunktion durch eine einzige Lorentzfunktion darstellbar wird. Genau dies scheint sich nach [45] zu bestätigen, wie im nachfolgenden Kap. 4.2 beschrieben wird: Die λ Max-Parameter (Abb. 4.4) entsprechen jedenfalls gut den empirisch gefundenen Halbwertsbreiten w (mit $w = 2\lambda$), vgl. Abb. 4.8.

4.2 Lorentzfunktion als empirischer Streukern

Die Linienspreizfunktion der *lateralen* Dosisverteilung ist offenbar (speziell bei kleinen Feldern) gut darstellbar in der Form einer Lorentzfunktion (vgl. Gln. (1.97)(1.133)) [45]:

$$\text{lsf}(x) = \frac{1}{\pi\lambda} \cdot \frac{1}{1 + x^2/\lambda^2} = \frac{2}{\pi w} \cdot \frac{1}{1 + 4x^2/w^2}; \quad (\text{normiert, } w := 2\lambda: \text{ Halbwertsbreite}). \quad (4.2)$$

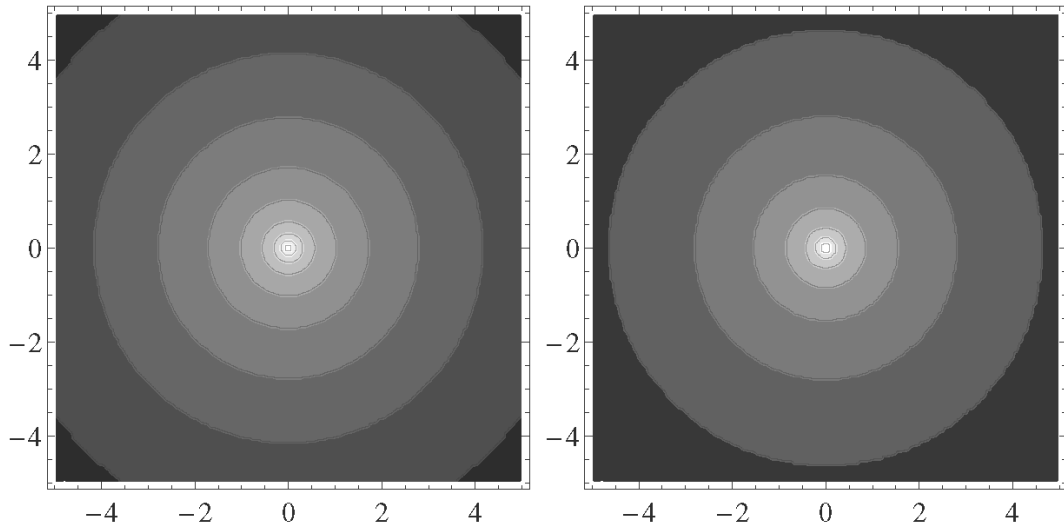


Abbildung 4.2: 2dim. lateraler Faltungskern in Wasser für 100mm Tiefe (links: 6X, rechts: 15X), aus einer Monte-Carlo-Rechnung. Die Darstellung ist logarithmisch, d.h. die Isodosen unterscheiden sich jeweils um einen konstanten Faktor. (Längenangaben in [mm].)

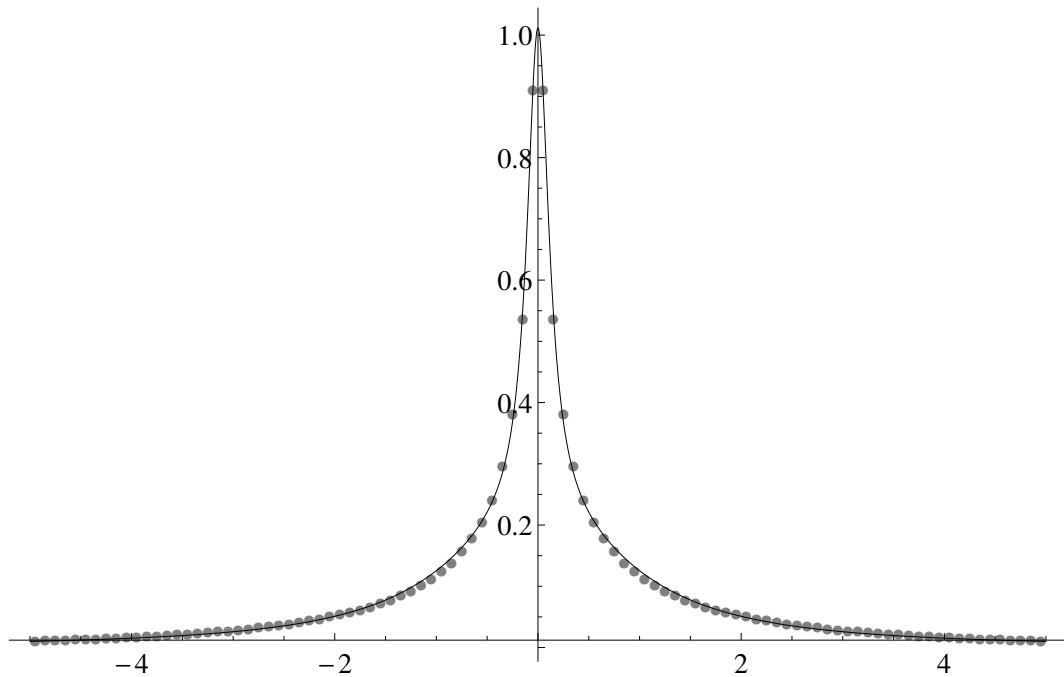


Abbildung 4.3: Linienspreizfunktion, berechnet aus 2dim. MC-Faltungskern in Wasser für 6X und 100mm Tiefe (graue Punkte). Die durchgezogene Kurve zeigt die angefittete Funktion (4.1). Längenangaben in [mm].

Damit ergibt sich die esf:

$$\text{esf}(x) = \theta * \text{lsf} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2x}{w} \tag{4.3}$$

und die (eindimensionale) Modulationstransferfunktion:

$$\text{lsf}(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{MTF}_1(\kappa) = e^{-\pi w |\kappa|}. \tag{4.4}$$

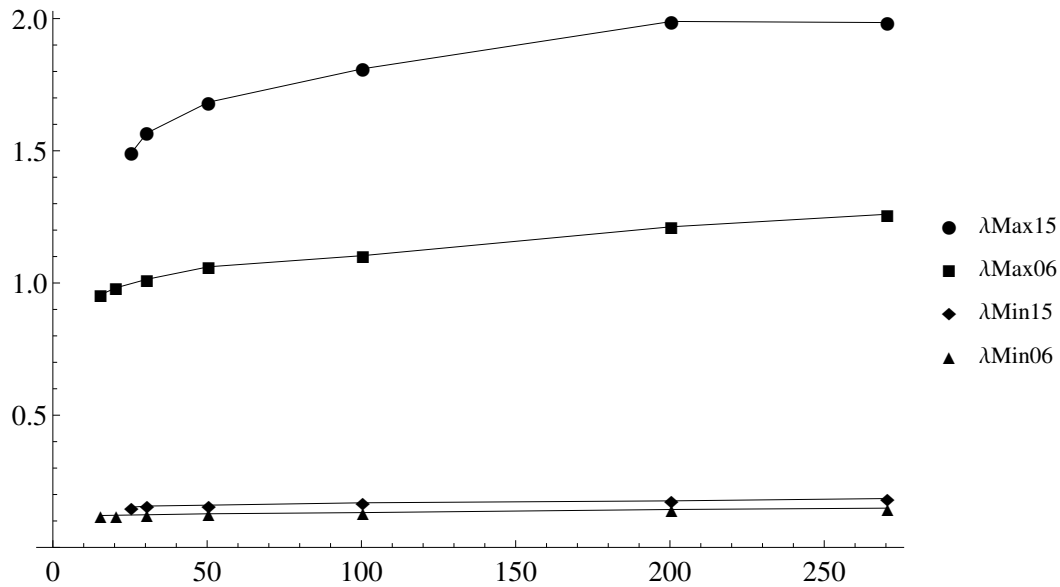


Abbildung 4.4: Abhängigkeit der Formparameter λ_i von der Tiefe. Für jeweils eine Energie (6MV und 15MV) gibt es deutlich einen großen und einen kleinen Wert (λ_{Max} und λ_{Min}). Alle Angaben in [mm].

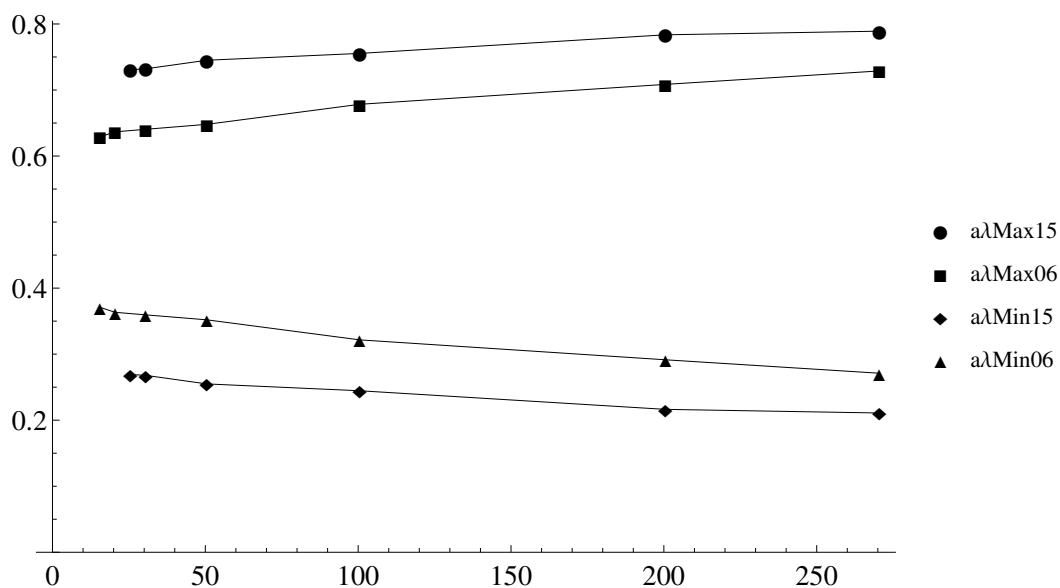


Abbildung 4.5: Abhängigkeit der Gewichtungen α_i von der Tiefe für jeweils eine Energie (6MV und 15MV). Die breiten Lorentzkurven (λ_{Max}) sind deutlich stärker gewichtet wie die schmalen (λ_{Min}). Längenangaben in [mm].

Die zweidimensionale psf lautet dann:

$$\text{psf}(r) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \cdot \left(\frac{1}{1+r^2/\lambda^2} \right)^{3/2} = \frac{2}{\pi w^2} \cdot \left(\frac{1}{1+4r^2/w^2} \right)^{3/2}, \quad (4.5)$$

(psf ist normiert, d.h. $2\pi \int_0^\infty \text{psf}(r)rdr = 1$)

Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen, indem man die Abel-Transformation ausführt (Kap. 1.3.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{psf}(\sqrt{x^2 + y^2}) dy = \dots = \frac{2}{\pi w} \cdot \frac{1}{1 + 4x^2/w^2} = \text{lsf}(x). \quad (4.6)$$

Um nun davon die Fourier-Transformierte, d.h. die MTF zu erhalten, kann vorteilhaft vom Fourier-Schicht-Theorem (Kap. 1.4.1) Gebrauch gemacht werden; das Profil eines zentralen Schnittes durch die 2dim-MTF ist die Fourier-Transformierte der lsf, also:

$$\text{MTF}_2(\rho) = e^{-\pi w \rho}. \quad (4.7)$$

Von der Richtigkeit dieses Ergebnisses kann man sich überzeugen, indem man direkt die psf mittels einer Hankel-Transformation (Kap. 1.3.3) berechnet:

$$\text{psf}(r) = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\pi w \rho} J_0(2\pi \rho r) \rho d\rho; \quad (4.8)$$

dieses Integral ist in der Literatur angegeben (z.B. [46](6.623/2)) und liefert genau den Ausdruck (4.5).

Der Vergleich dieses Ergebnisses mit einem tatsächlichen Faltungskern (siehe Abb. 4.6) zeigt schnell, dass der Lorentz-Ansatz keinesfalls für konkrete Dosisberechnungen geeignet ist.

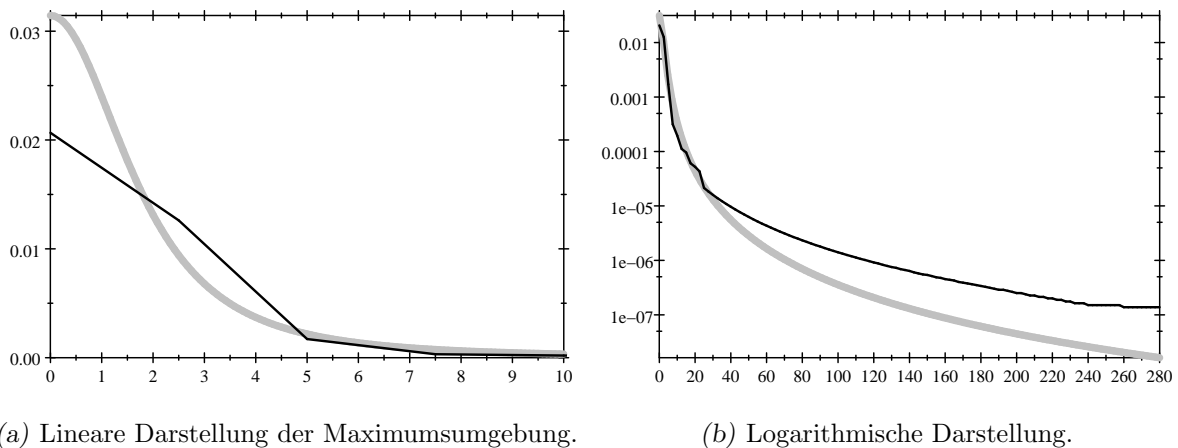


Abbildung 4.6: Formvergleich der psf (grau) nach Gl. (4.5) mit einem realen in einem Bestrahlungssystem verwendeten *single pencil beam kernel* (Eclipse™ von Varian™, PBC, 6MV, Tiefe 100mm). Man sieht vor allem in der logarithmischen Darstellung, dass durch den Lorentz-Ansatz der Faltungskern zumindest im Prinzip richtig dargestellt wird – dagegen ergäbe hier z.B. die Gaussfunktion als psf eine negative Parabel.

Daraus kann im Grunde alles Wesentliche bestimmt werden; nur der tiefenabhängige Wert der Halbwertsbreite w muss noch empirisch ermittelt werden. Dies kann z.B. geschehen durch Anfitzen der Funktion (4.3) an das Dosisprofil eines großen, halb geöffneten Feldes, also durch Anfitzen an die experimentelle lsf.

4.3 Abschätzung interessanter Größen

Im Folgenden sollen *Abschätzungen* vorgenommen werden, die mit dem analytischen Lorentz-Kern problemlos möglich sind.

4.3.1 Halbschattenbreite

Die Halbschattenbreite ist definiert als Bereich des Feldrandes zwischen 80% und 20% der Maximumintensität (z.B. [47]), d.h. zwischen $1/2 \pm 0.3$. So ergibt sich für diese Breite Δ aus Gl. (4.3):

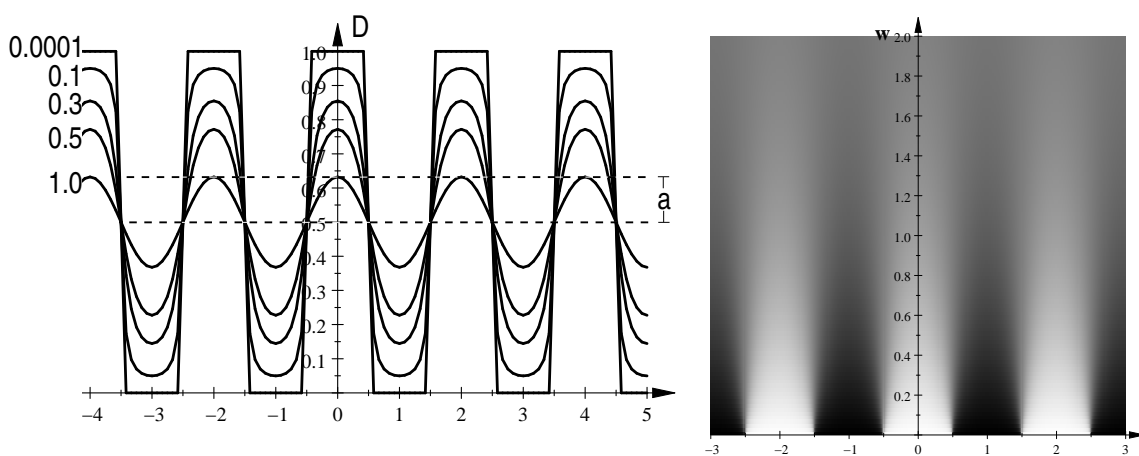
$$\frac{\Delta}{w} = \frac{1}{2} (\tan(\pi \cdot 0.3) - \tan(-\pi \cdot 0.3)) = \tan(\pi \cdot 0.3) \approx 1.376. \quad (4.9)$$

4.3.2 Sinnvolle Minimal-Breite von MLC-Leafs

Die oben beschriebene Verunschärfung der Dosisverteilung legt die Größenordnung einer minimal sinnvollen Breite der MLC-Leafs fest. Diese Abhängigkeit kann nun quantifiziert werden. Dazu gibt man sich ein alternierendes, zackenförmiges MLC-Relief vor, bei dem also z.B. die geradzahigen Leafs geöffnet, die ungeradzahigen geschlossen sind und berechnet die Verschmierung der Dosisverteilung dieses Reliefs mit zunehmender Größe des Faltungskerns w in Relation zur Leaf-Breite b . Da es sich in dieser Formulierung um ein eindimensionales Problem handelt, kann der Faltungskern (4.2) verwendet werden, und dann ergibt sich das Dosisprofil $D(x, b, w)$ sofort aus der Faltung mit einer Summe von entsprechend versetzten Rechtecksfunktionen (Abb. 4.7):

$$D(x, b, w) = \frac{1}{\pi} \sum_n \left[\arctan \frac{x - (4n - 1)b/2}{w/2} - \arctan \frac{x - (4n + 1)b/2}{w/2} \right] \quad (4.10)$$

Für die nachfolgende Rechnung ist vor allem die Fourier-Transformierte des Profils relevant; dazu wird



(a) Dosisprofil mit verschieden großen Faltungskernen w . (b) Profil in Abhängigkeit von w .

Abbildung 4.7: Dosisprofil resultierend aus beschriebenem MLC-Relief: Abhängigkeit vom Faltungskern gemäß Gl. (4.10).

das Relief eines einzelnen Leafs der Breite b wieder vereinfacht als Rechtecksfunktion dargestellt:

$$\begin{array}{c} \text{graph of a rectangular pulse from } -b/2 \text{ to } b/2 \end{array} = \Pi\left(\frac{x}{b}\right) \quad \circ \bullet \quad b \cdot \text{sinc}(b\kappa) = \frac{\sin(\pi b\kappa)}{\pi\kappa}. \quad (4.11)$$

Daraus lässt sich das beschriebene MLC-Relief leicht mit Hilfe der Kammfunktion (Kap. 1.2.5) formulieren:

$$\begin{array}{c} \text{graph of a periodic rectangular pulse train} \end{array} = \Pi\left(\frac{x}{b}\right) * \frac{1}{2b} \text{III}\left(\frac{x}{2b}\right) \quad \circ \bullet \quad \frac{\sin(\pi b\kappa)}{\pi\kappa} \cdot \text{III}(2b\kappa). \quad (4.12)$$

Das verunschärfte Profil ergibt sich folglich aus:

$$\left[\Pi\left(\frac{x}{b}\right) * \frac{1}{2b} \text{III}\left(\frac{x}{2b}\right) \right] * \text{lsf}(x) \quad \circ \bullet \quad \frac{\sin(\pi b\kappa)}{\pi\kappa} \cdot \text{III}(2b\kappa) \cdot e^{-\pi w\kappa}, \quad (4.13)$$

die Fourier-Transformierte besteht also aus einem Linienspektrum, moduliert mit der Funktion $\sin(\pi w\kappa)/(\pi\kappa) \cdot \exp(-\pi w\kappa)$.

Inwieweit nun diese konkrete MLC-Konfiguration in der resultierenden Dosisverteilung überhaupt erkennbar ist, wird im Wesentlichen durch die Linien der Frequenzen $\pm 1/(2b)$ bestimmt; diese sind die kleinsten von Null verschiedenen Frequenzen und repräsentieren die Grundfrequenz des Profils. Interessant ist also deren Amplitude in Relation zum Mittelwert der Dosisverteilung. Für diese beiden Linien (herausgenommen aus Gl. (4.13)) gilt:

$$\frac{\sin(\pi b/(2b))}{\pi/(2b)} e^{-\frac{\pi}{2} \frac{w}{b}} \cdot [\delta(2b\kappa + 1) + \delta(2b\kappa - 1)] \quad \circ \bullet \quad \underbrace{\frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2} \frac{w}{b}} \cos\left(2\pi \frac{x}{2b}\right)}_{=:a}, \quad (4.14)$$

wie zu erwarten, handelt es sich dabei um den führenden \cos -Term (vgl. Gl. (1.139)). Der Mittelwert M des Profils liegt hier bei $1/2$; das gesuchte Verhältnis der Amplitude a (vgl. Abb. 4.7(a)) der Grundfrequenz zum Hintergrund beträgt somit:

$$\frac{a}{M} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2} \frac{w}{b}}. \quad (4.15)$$

In der Literatur (z.B. [1]) wird für die praktische Grenzfrequenz für einen noch relevanten Beitrag diejenige Frequenz genommen, deren Anteil auf 4% abgefallen ist; damit ist also zu setzen $a/M = 0.04$. In diesem Sinne ergibt sich als minimal sinnvolle Leafbreite b :

$$b = w \cdot \frac{\pi}{2 \ln(100/\pi)} \approx w \cdot 0.45 \quad (4.16)$$

4.3.3 Rechenraster bei Dosisberechnung

Die Dimensionierung des Rechenrasters hängt von den auftretenden Ortsfrequenzen der räumlichen Dosisverteilung ab. Mit der selben Argumentation wie oben wird hier als „maximale“ Frequenz $\tilde{\rho}$ diejenige genommen, bei der die MTF auf 4% abgefallen ist, also:

$$e^{-\pi w \tilde{\rho}} \stackrel{!}{=} 0.04 \quad \implies \quad \tilde{\rho} = \frac{2 \ln 5}{\pi w} \approx \frac{1}{w}. \quad (4.17)$$

Um diese Frequenz mit diskreter Abtastung noch zu erfassen, muss die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß sein (vgl. Kap. 1.6.3), also $2/w$. Die Schrittweite des Rechenrasters sollte demgemäß kleiner als $w/2$ sein.

Dieses Ergebnis ist konsistent mit dem für die minimale Leafbreite: Um die Dosisverteilung aus alternierend gesetzten Leafs (d.h. Ortsfrequenz $1/(2b)$) zu erfassen, wird mindestens die Abtastfrequenz von $1/b \approx 2/w$ benötigt.

4.4 Empirische Bestimmung der Halbwertsbreite

Wie oben beschrieben, gibt es eine einfache Möglichkeit der Bestimmung der Halbwertsbreite: Messung des Dosisprofils eines Halbfeldes und Anfitzen der esf von Gl. (4.3) an diese Werte. Das Ergebnis dieser Auswertung ist in Abb. 4.8 dargestellt. Es fällt auf, dass der Streueffekt bei der hohen Energie stärker ist. Die Werte stimmen hinreichend gut mit den in der Literatur [45] angegebenen überein. Ansonsten würde man dieses einfache Modell überstrapazieren.

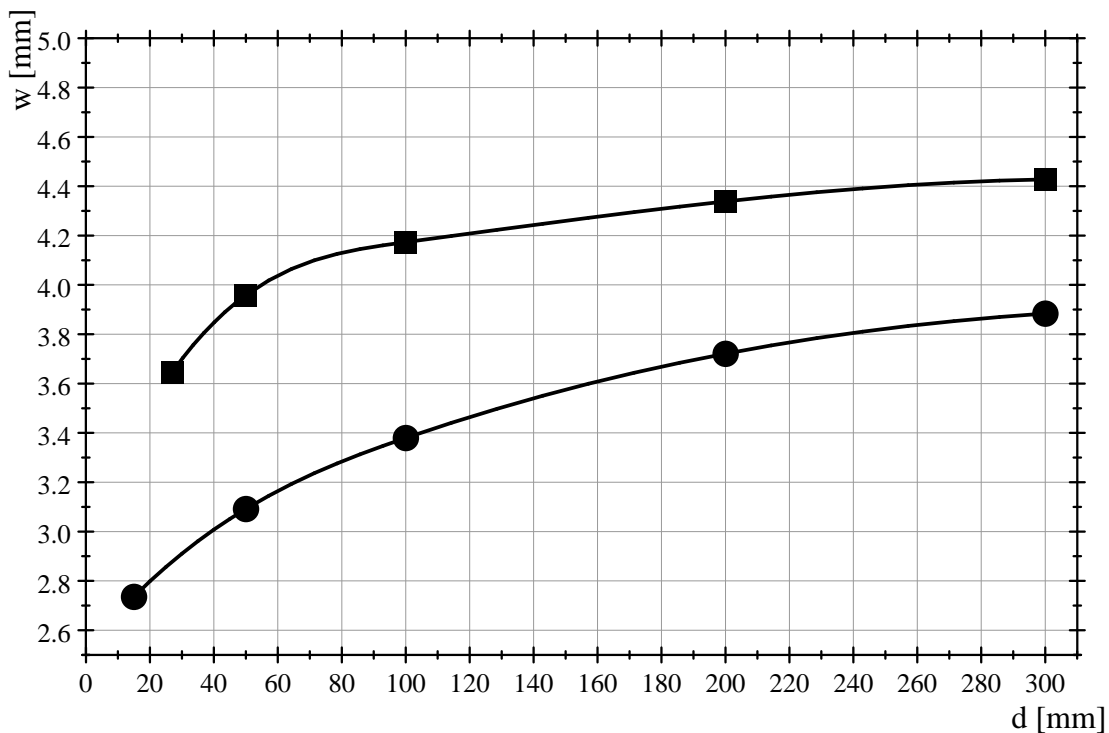


Abbildung 4.8: Halbwertsbreiten in Abhängigkeit von der Tiefe, wie sie sich aus Messwerten ergeben (Kreise: 6MV, Quadrate: 15MV).

Unabhängig davon kann man das Querprofil von schmalen Feldern der Breite b betrachten, und zwar in verschiedenen Tiefen bei festem Abstand zur Quelle (TPR-Konfiguration, Kap.3.2). Ist ein solches schmales Feld extrem rechteckig (z.B. $3 \times 40\text{cm}^2$), dann sollte sich sein Querprofil gemäß Gl. (4.3) schreiben lassen als:

$$D(x) \sim \arctan\left(\frac{x + b/2}{w/2}\right) - \arctan\left(\frac{x - b/2}{w/2}\right). \quad (4.18)$$

Der Vergleich mit tatsächlichen Profilen ist in den Abbn. 4.9 und 4.10 gezeigt. Die so gefundene Größenordnung für die Halbwertsbreite stimmt sehr gut mit den obigen Werten überein. Zudem offenbart sich hier nochmals deutlich die Unzulänglichkeit des Lorentz-Kerns als Streukern zur konkreten Dosisberechnung: Der Niedrigdosisbereich, bzw. die langreichweitigere Streuung, wird maßgeblich unterschätzt! Dagegen werden die Hochdosisbereiche realistisch wiedergegeben, und genau dies ist wesentlich für die gemachten Abschätzungen.

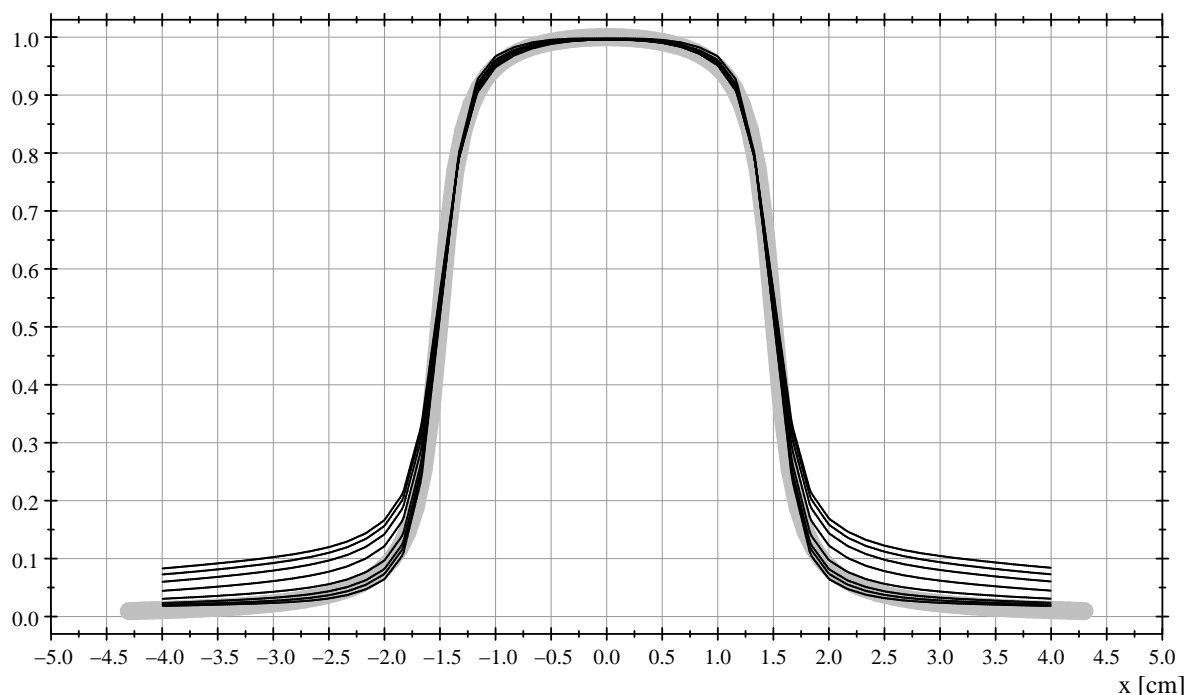


Abbildung 4.9: Dosisprofil eines langen 3cm-Spaltes bei 6MV bei Tiefen von 2cm – 25cm. Mit zunehmender Tiefe steigt die periphere Streudosis. Das Dosisprofil nach Gl. (4.18) mit $w = 0.3\text{cm}$ ist grau dargestellt.

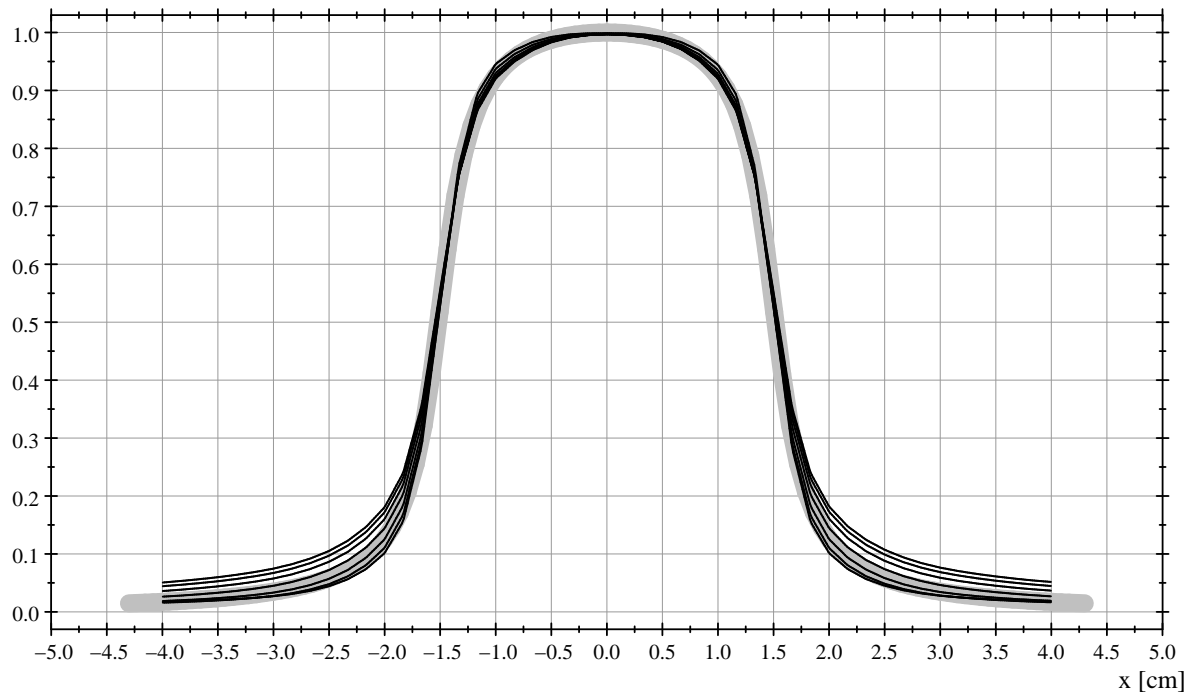


Abbildung 4.10: Dosisprofil eines langen 3cm-Spaltes bei 15MV bei Tiefen von 3cm – 25cm. Mit zunehmender Tiefe steigt die periphere Streudosis. Das Dosisprofil nach Gl. (4.18) mit $w = 0.45$ cm ist grau dargestellt.

Kapitel 5

Faltungskern von Ionisationskammern

Wie in Kap. 1.6.4 beschrieben, sind Messwerte typischerweise ein Faltungsprodukt von tatsächlichem Messwert und der psf des Messinstruments. Bei einer Dosismessung mit Messkammern ist genau das der Fall. Um diesen Effekt herauszurechnen, sind zwei Problematiken getrennt zu betrachten:

- Der Faltungskern muss bekannt sein,
- eine Rückfaltung ist durchzuführen.

5.1 Gaussfunktion als Faltungskern

Natürlich hängt der Faltungskern individuell von der Messkammer ab. Interessanterweise verhält es sich offenbar so, dass bei *Ionisationskammern* dieser Kern stets die Form einer Gaussfunktion (vgl. Gl. 1.62) hat, siehe z.B.[48]. Ebendort sind dafür auch konkrete Werte zu einzelnen Kammern zu finden (Auswahl):

Kammer	Abmessung lat. [mm]	σ lat. [mm] 6MV / 15MV	Abmessung long. [mm]	σ long. [mm] 6MV / 15MV
PTW 31014 PinPoint	2.0	0.99 / 0.99	5.0	1.98 / 2.02
PTW 31015 PinPoint	2.9	1.40 / 1.49	5.0	2.23 / 2.30
PTW 31010 SemiFlex	5.5	2.20 / 2.30	6.5	2.28 / 2.50
PTW 31013 SemiFlex	5.5	2.41 / 2.44	16.25	4.87 / 5.05
PTW 10024 ARRAY 729	5.0	2.27 / 2.37	5.0	2.27 / 2.37

Angegeben sind hier energieabhängig die Parameter der lsf jeweils lateral und longitudinal bzgl. der Kammergeometrie. Diese Werte gelten nicht im Aufbaubereich einer Dosisverteilung.

Es lohnt sich deshalb, einen näheren Blick auf die Eigenschaften der Gaussfunktion als Faltungskern zu werfen. Nimmt man zunächst eine radialsymmetrische psf an, dann zeigt sich, dass diese ebenfalls eine Gaussfunktion ist, da sie wegen Gl. (1.291) direkt aus einer inversen Abel-Transformation (Gl. (1.168)) der lsf folgt:

$$-\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{-x}{\sigma^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \Big|_{x=r}^{\infty} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}. \quad (5.1)$$

Hier sollte beachtet werden, dass σ nicht mehr der Standardabweichung entspricht; die tatsächliche – radiale – Standardabweichung τ berechnet sich nun aus dem Mittelwert von $r^2 = (x^2 + y^2)$ bzgl. der zweidimensionalen Verteilung:

$$\tau^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^2 \iint (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)} dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2/(2\sigma^2)} r dr = 2\sigma^2; \quad (5.2)$$

die psf als radiale Gaussfunktion lautet damit:

$$\operatorname{psf}(r) = \frac{1}{\pi\tau^2} e^{-r^2/\tau^2}. \quad (5.3)$$

Bei lateral und longitudinal unterschiedlichen lsf könnte man folglich eine psf einfach als Produkt $\operatorname{psf}(x, y) = \operatorname{lsf}_{\text{lat}}(x) \cdot \operatorname{lsf}_{\text{long}}(y)$ konstruieren, da dann z.B. stets gilt:

$$\int \operatorname{psf}(x, y) dy = \operatorname{lsf}_{\text{lat}}(x) \int \operatorname{lsf}_{\text{long}}(y) dy = \operatorname{lsf}_{\text{lat}}(x). \quad (5.4)$$

Speziell durch die Gauss-Form der psf ist dann eine lsf nach jeder Richtung wieder eine Gaussfunktion, was konsistent ist mit den Feststellungen in [48]. Außerdem ist es generell von Vorteil, wenn die Fourier-Transformierte eines Faltungskerns keine Nullstelle aufweist.

5.2 Rückfaltung des Gausskerns

5.2.1 Quasikontinuierliche Abtastung

Das verbleibende Problem ist schließlich die Rückfaltung: In Kap. 1.7 sind im Wesentlichen zwei Methoden vorgestellt, aber bzgl. *perfekter* Rückfaltung besteht keine wirklich den „Härtetest“ $\overleftarrow{k} * k \stackrel{?}{=} \delta$ (vgl. Gl. (1.319)). Versuchen könnte man dies z.B. mit der dort vorgestellten *Methode 2*:

Sei also:

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}. \quad (5.5)$$

Die Momente dieses Kerns lassen sich direkt berechnen:

$$\langle x^n \rangle = \sigma^n \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sigma^n (n-1)!! \quad (\text{vgl. Gln. (1.204), (1.205)}). \quad (5.6)$$

Die sich ergebenden Koeffizienten sind angenehm kurz:

$$a_n = \frac{\sigma^n}{(-2)^{n/2} (n/2)!}. \quad (5.7)$$

Die innere Summe in Gl. (1.327) lautet damit:

$$\sum_{m=0}^n a_{2m} a_{2(n-m)} = \sigma^{2n} \frac{1}{(-2)^n} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} = \sigma^{2n} \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (5.8)$$

Mit Gl. (1.188) erhält man einen handlichen Ausdruck für die Ableitungen des Gausskerns:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} k(x) = \frac{(-1)^{2n}}{\sigma^{2n}} H_{2n}(x/\sigma) k(x). \quad (5.9)$$

Damit ergibt sich insgesamt für den invertierten Gausskern nach Gl. (1.327):

$$\overset{\leftarrow}{k} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} H_{2n}(x/\sigma) k(x). \quad (5.10)$$

Abb. 5.4 zeigt diesen inversen Faltungskern bis zu verschiedenen Ordnungen entwickelt und – als Test – dessen Faltung mit dem zugrundeliegenden Gausskern: Wie bekannt (Gl. (1.319)), sollte das Ergebnis davon eine Deltafunktion sein oder zumindest darauf zulaufen. Anders ausgedrückt, zeigt sich die Situation

$$\begin{aligned} \text{vor der Anwendung: } & f * k; \\ \text{nach der Anwendung: } & f * k * \overset{\leftarrow}{k}. \end{aligned}$$

In jedem Fall sollte die Funktion $k * \overset{\leftarrow}{k}$ gegenüber k deutlich kontrahiert sein. Diese Eigenschaft zeigt sich nur sehr zögerlich – selbst wenn bis zu unpraktikabel hohen Ordnungen gegangen wird. Der inverse Kern $\overset{\leftarrow}{k}$ selbst ändert dabei seine Form stark mit der jeweils berücksichtigten maximalen Ordnung. Es tritt also keine Konvergenz ein.

Hier ist aber keine beliebige Funktion, sondern konkret eine Dosisverteilung zu messen, und eine solche hat stets einen geglätteten Verlauf, da sie ja als Faltungsprodukt von Fluenz und Dosis-Faltungskern beschrieben werden kann. Die Anforderungen bzgl. der Rückfaltung sind also erheblich geringer: Nach Kap. 4 ist die lsf einer Dosisverteilung (lsf_D) hinreichend bekannt; es handelt sich um eine Lorentzfunktion mit bekannten Parametern. Für die lsf einer Kammer (lsf_K) sind die Parameter ebenfalls bekannt (vgl. [48] bzw. Tab. p. 129). Hier noch einmal in Gegenüberstellung:

$$\text{lsf}_D(x) = \frac{1}{\pi\lambda} \cdot \frac{1}{1 + (x/\lambda)^2} \quad \text{---} \bullet \quad F(\kappa) = e^{-2\pi\lambda|\kappa|} \quad \text{mit } \lambda \approx [1.5 \dots 2.3] \text{mm} \quad (5.11)$$

$$\text{lsf}_K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad \text{---} \bullet \quad K(\kappa) = e^{-2\pi^2\sigma^2\kappa^2} \quad \text{mit } \sigma \approx [0.7 \dots 2.5] \text{mm} \quad (5.12)$$

Aufschlussreich ist nun ein Vergleich der Spektren von Gauss- und Lorentzkern (vgl. Abb. 5.1). Das Spektrum des Lorentzkerns stellt sozusagen den ungünstigsten Fall dar; das Spektrum einer Dosisverteilung kann nur gutartiger sein.

Das entscheidende Kriterium für das Gelingen einer Rückfaltung ist nun, inwieweit das Spektrum des Lorentzkerns dadurch wiederhergestellt werden kann, weil das dann für das Spektrum der Dosisverteilung erst recht gilt. Am anschaulichsten lässt sich dies beim iterativen Ansatz (Kap. 1.7.2) demonstrieren: Bezeichnet F das Spektrum des Lorentzkerns und K das Spektrum des Gausskerns, dann stellt sich gemäß Gl. (1.344) die Situation nach n Iterationen dar als $F \cdot (1 - (1 - K)^{n+1})$. In Abb. 5.2 ist deshalb der Vergleich von F mit $(1 - (1 - K)^{n+1})$ gezeigt. Es wird deutlich, dass z.B. für

$\sigma \leq 1.7\text{mm}$ (bei 64 Iterationen) die Rückfaltung quasi in jedem Fall erfolgreich ist, während es bei größeren Werten von σ auf die tatsächliche Ausdehnung des Spektrums der Dosisverteilung ankommt. Diese ist aber sicherlich bandbegrenzter als der Lorentzkern selbst. Eine Verbesserung tritt in jedem Fall ein.

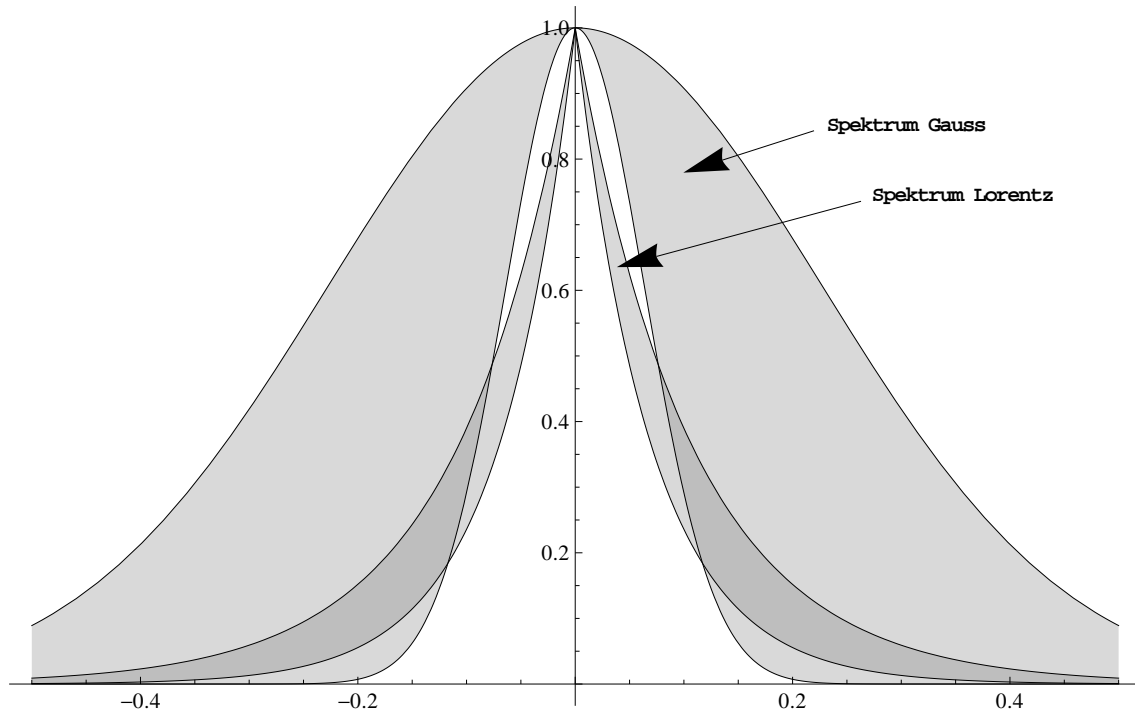


Abbildung 5.1: Vergleich der Spektren von Gauss- und Lorentzkern mit den in Gln. (5.11)(5.12) angegebenen Parameterbereichen.

5.2.2 Diskrete Abtastung

Im Folgenden soll die Situation betrachtet werden, wie sie sich bei einer periodischen Anordnung von Messorten darstellt. Dies ist typischerweise bei Array-Anordnungen von Kammern der Fall. Als konkretes Beispiel soll dafür das seven29[®]-Array von PTW[®] dienen. Dieses Array besteht aus einer quadratischen Konfiguration von $27 \times 27 (= 729)$ Kammern, die zeilen-, bzw. spaltenweise im Abstand von 10mm angeordnet sind. Die Kammern selbst haben eine Abmessung von $(5 \times 5)\text{mm}^2$ (vgl. Tab. p. 129). Eine eindimensionale Betrachtung des Problems soll hier genügen.

Was gemessen werden soll ist die Dosis, die sich aus einer Fluenz ϕ ergibt als $\phi * \text{lsf}_D$. Das Ergebnis einer Messung mit Kammern und in periodischer Abtastung (mit Periode L) ist dann:

$$(\phi * \text{lsf}_D * \text{lsf}_K) \cdot \frac{1}{L} \text{III} \left(\frac{x}{L} \right) \quad \circ \bullet \quad (\Phi \cdot F \cdot K) * \text{III}(\kappa L). \quad (5.13)$$

Im Fourier-Raum bedeutet dies eine periodische Wiederholung des Terms $(\Phi \cdot F \cdot K)$ im Abstand von $\Delta\kappa = 1/L$ (vgl. Gl. (1.306)). Da es sich um eine diskrete Abtastung handelt, kommt das Abtasttheorem (Kap. 1.6.3) zur Anwendung: Demnach ist die maximale Frequenz im Messwertspektrum gerade halb so groß wie die Abtastfrequenz $1/L$. Macht man bzgl. $(\Phi \cdot F)$ keine weiteren Einschränkungen, als eben die Beschränkung auf den Bereich $\pm 1/(2L)$, so kann dort als ungünstigster Fall $\Phi \equiv 1$ gesetzt werden. Alles

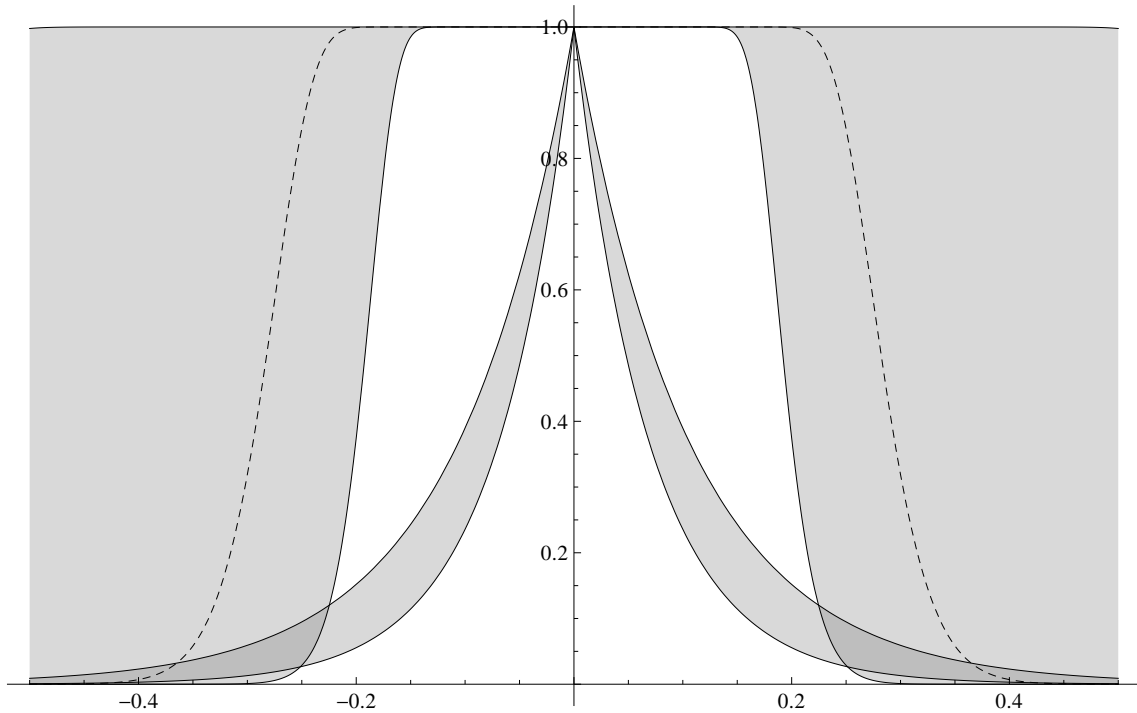


Abbildung 5.2: Vergleich des Spektrums von Lorentzkern mit dem Term $(1 - (1 - K)^{n+1})$, der sich aus der Iteration ($n = 64$) ergibt. Die gestrichelte Linie gilt für $\sigma = 1.7\text{mm}$. Die markierten Parameterbereiche entsprechen wieder den Werten nach Gln. (5.11)(5.12).

Andere ist im Fall des seven29-Arrays bekannt: $L = 10\text{mm}$, $\sigma = (2.27\text{mm}$ bzw. $2.37\text{mm})$ und wieder $\lambda \approx (1.5 \cdots 2.3)\text{mm}$. Abb. 5.3 zeigt den Term $(1 - (1 - K)^{n+1})$ in Relation zur Bandbreite, in der sich das Messwertspektrum bewegen kann. Da diese Bandbreite so klein ist (wegen der groben Abtastung), sind nur ganz wenige Iterationsschritte bis zur Konvergenz notwendig.

5.2.3 Abschätzung des Volumen-Störfaktors bei Ionisationskammern

Bei sehr kleinen Strahlungsfeldern bildet sich wegen der Verschmierung der Dosis gegenüber dem Profil der Fluenz kein konstantes Dosislevel mehr aus. Eine Messung mittels Ionisationskammer (mit stets endlich großem Faltungskern) führt dann stets zu einer fehlerhaften Messung auch des Dosismaximums. Durch eine einfache und elegante Methode [49] kann dieser Fehler abgeschätzt werden:

Sei $D(x)$ die wahre Dosisverteilung bei einem eindimensionalen (typischerweise glockenförmigen) Querprofil eines kleinen Feldes. Diese Kurve kann man sich (z.B. im Bereich der Halbwertsbreite) durch ein Polynom approximiert denken:

$$D(x) = \sum_n a_n x^n.$$

Die Koeffizienten a_n sind unbekannt, insbesondere ist $a_0 = D(0)$ die hier zu bestimmende Größe. Was man dagegen kennt, sind die Messwerte $D_m(x)$, gemessen mit einer Kammer mit vollständig bekanntem Faltungskern $k(x)$ („laterale Dosisansprechfunktion“, vgl. Kap. 5.1):

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad (5.14)$$

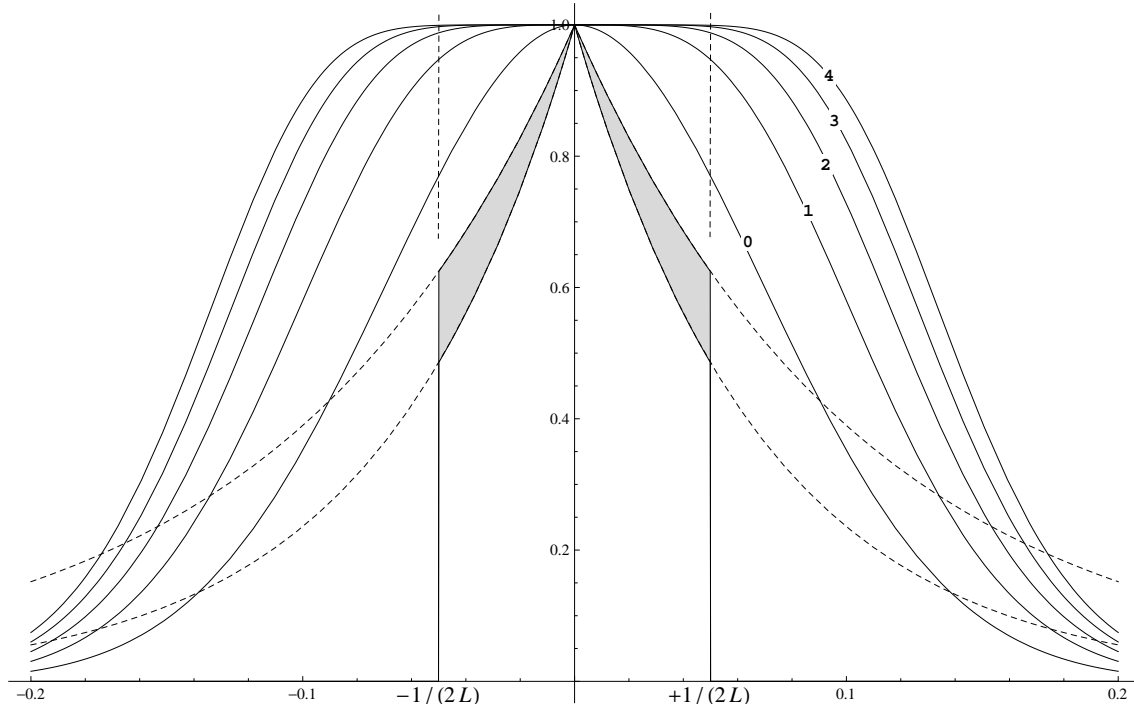


Abbildung 5.3: PTW seven29-Array: Vergleich des (nun beschränkten) Spektrums des Lorentzkerns (grau) mit dem Term $(1 - (1 - K)^{n+1})$ für $n = 0, \dots, 4$ (mit $\sigma = 2.3$). Ab der 3. Iteration ist quasi keine Verbesserung mehr zu erzielen.

Diese Messwerte lassen sich ebenso approximieren/anfitten:

$$D_m(x) = \sum_n b_n x^n$$

mit dann bekannten Koeffizienten b_n . Den Zusammenhang stellt die Faltungsoperation dar, die hier analytisch (!) ausgeführt werden kann:

$$D_m = k * D = k * \left(\sum_n a_n x^n \right) = \sum_n a_n (k * x^n) \stackrel{!}{=} \sum_n b_n x^n; \quad (5.15)$$

aus Symmetriegründen kommen nur die geraden Terme vor, und diese lauten:

$$\begin{aligned} \sum_n a_n (k * x^n) = & a_0 + \\ & a_2 (\sigma^2 + x^2) + \\ & a_4 (3\sigma^4 + x^4 + 6\sigma^2 x^2) + \\ & a_6 (15\sigma^6 + x^6 + 15\sigma^2 x^4 + 45\sigma^4 x^2) + \\ & a_8 (105\sigma^8 + x^8 + 28\sigma^2 x^6 + 210\sigma^4 x^4 + 420\sigma^6 x^2) + \\ & a_{10} (945\sigma^{10} + x^{10} + 45\sigma^2 x^8 + 630\sigma^4 x^6 + 3150\sigma^6 x^4 + 4725\sigma^8 x^2) + \dots \end{aligned}$$

Aus Gl. (5.15) resultiert dann ein Gleichungssystem zur Bestimmung der (hier ersten 6) Koeffizienten

a_n :

$$\begin{aligned}
 945a_{10}\sigma^{10} + 105a_8\sigma^8 + 15a_6\sigma^6 + 3a_4\sigma^4 + a_2\sigma^2 + a_0 - b_0 &= 0 \\
 4725a_{10}\sigma^8 + 420a_8\sigma^6 + 45a_6\sigma^4 + 6a_4\sigma^2 + a_2 - b_2 &= 0 \\
 3150a_{10}\sigma^6 + 210a_8\sigma^4 + 15a_6\sigma^2 + a_4 - b_4 &= 0 \\
 630a_{10}\sigma^4 + 28a_8\sigma^2 + a_6 - b_6 &= 0 \\
 45a_{10}\sigma^2 + a_8 - b_8 &= 0 \\
 a_{10} - b_{10} &= 0
 \end{aligned}$$

mit den Lösungen:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -945b_{10}\sigma^{10} + 105b_8\sigma^8 - 15b_6\sigma^6 + 3b_4\sigma^4 - b_2\sigma^2 + b_0 \\
 a_2 &= 4725b_{10}\sigma^8 - 420b_8\sigma^6 + 45b_6\sigma^4 - 6b_4\sigma^2 + b_2 \\
 a_4 &= -3150b_{10}\sigma^6 + 210b_8\sigma^4 - 15b_6\sigma^2 + b_4 \\
 a_6 &= 630b_{10}\sigma^4 - 28b_8\sigma^2 + b_6 \\
 a_8 &= b_8 - 45b_{10}\sigma^2 \\
 a_{10} &= b_{10}
 \end{aligned}$$

Für den Volumen-Störungsfaktor p_V (nach [50]) ergibt sich damit als Korrektionsfaktor für das Dosismaximum:

$$p_V := \frac{D}{D_m} = \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{b_0} \cdot (-945b_{10}\sigma^{10} + 105b_8\sigma^8 - 15b_6\sigma^6 + 3b_4\sigma^4 - b_2\sigma^2 + b_0). \quad (5.16)$$

Die hier angegebenen hohen Ordnungen sind in der Praxis sicherlich nicht notwendig. Aber neben einer „darstellerischen Ästhetik“ vermittelt ein Mehr an Termen vor allem ein Bild von der Regularität dieser Summe, die sich tatsächlich kompakt schreiben läßt als (bzgl. „!“ vgl. Gl. (1.205)):

$$p_V = \frac{1}{b_0} \cdot \sum_{n=0}^k (2n-1)!! \cdot b_{2n} \cdot (-\sigma^2)^n. \quad (5.17)$$

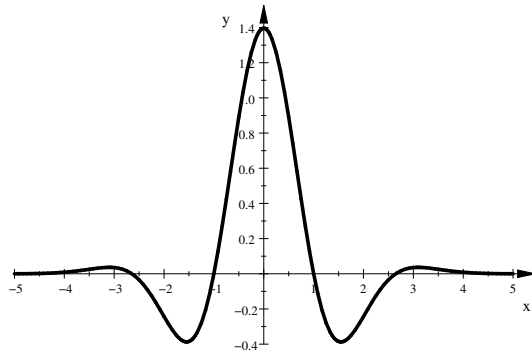
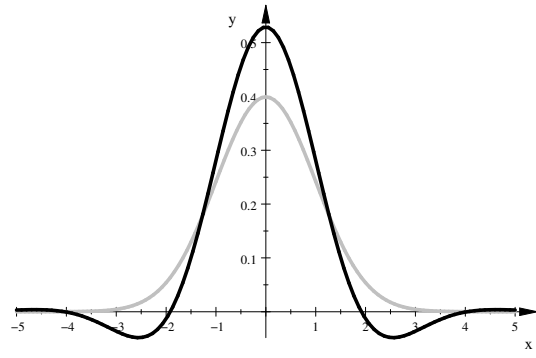
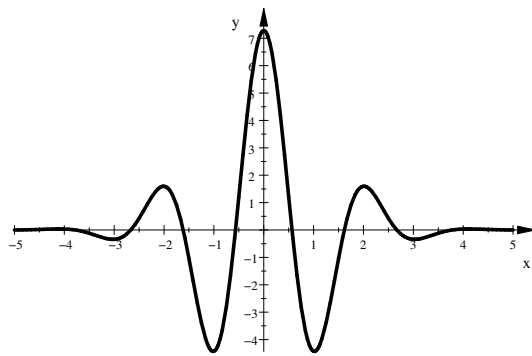
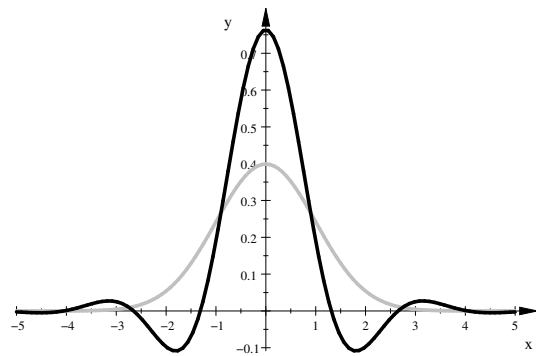
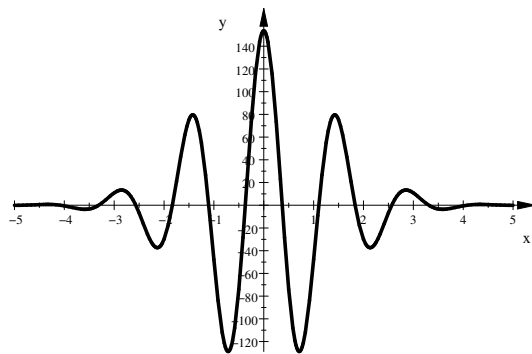
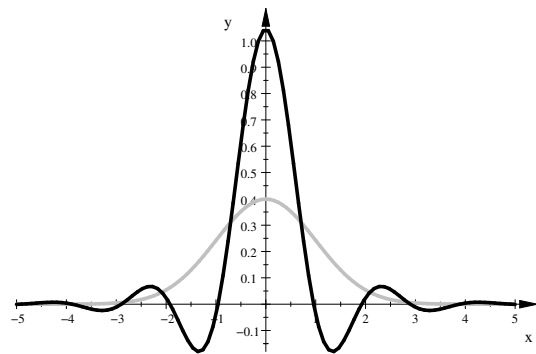
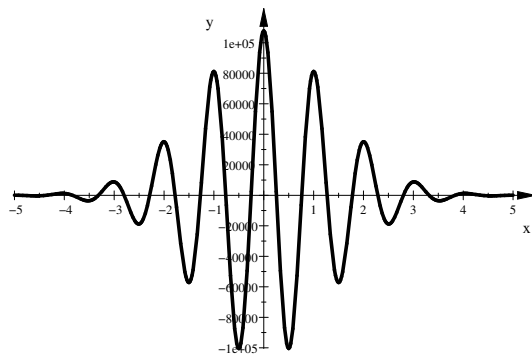
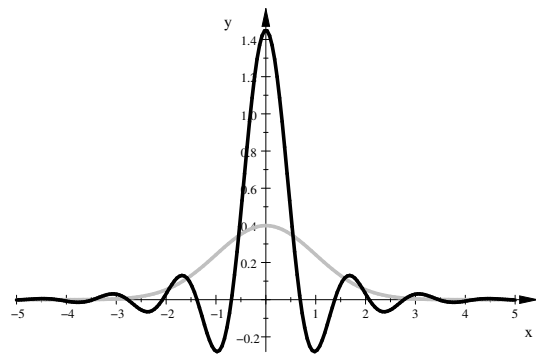
(a) \overleftarrow{k} (bis 4. Ordnung).(b) $\overleftarrow{k} * k$ (bis 4. Ordnung).(c) \overleftarrow{k} (bis 10. Ordnung).(d) $\overleftarrow{k} * k$ (bis 10. Ordnung).(e) \overleftarrow{k} (bis 20. Ordnung).(f) $\overleftarrow{k} * k$ (bis 20. Ordnung).(g) \overleftarrow{k} (bis 40. Ordnung).(h) $\overleftarrow{k} * k$ (bis 40. Ordnung).

Abbildung 5.4: Inverser Gausskern (links), erreichte „Deltafunktion“ (rechts). Dazu im Vergleich der Kern k (grau). (Jeweils mit $\sigma = 1$)

Kapitel 6

Aspekte der Rotationsbestrahlung

Rotationsbestrahlung ist eine Bestrahlungstechnik, bei der ein konstantes offenes Feld während einer Teil- oder Vollrotation des Bestrahlungsgerätes abgestrahlt wird. Diese Technik selbst ist zwar nicht essentiell, dennoch können deren grundlegende Eigenschaften bei allen Bestrahlungstechniken zum tragen kommen, bei denen viele Einstrahlwinkel verwendet werden.

Unter idealisierten Annahmen:

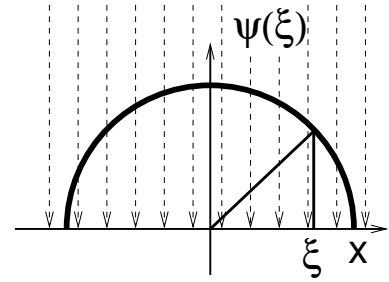
- Durchführung einer Vollrotation (d.h. Rotationssymmetrie),
- zweidimensionale Betrachtung,
- Parallelstrahlgeometrie,
- keine Strahlschwächung,
- keine Streuung,

sollen im Folgenden wesentliche Zusammenhänge hergeleitet werden. In gewisser Weise sind diese vereinfachenden Annahmen in sich konsistent: Die zweidimensionale Betrachtung ist bei einem rotationssymmetrischen Problem angemessen. Es ergeben sich so stets Gegenfelder, wodurch sich die Vernachlässigung von Schwächung und Strahldivergenz ein Stück weit rechtfertigen lassen.

6.1 Berechnung des Dosisprofils

Zunächst wird das Dosisprofil $p(x)$ berechnet, das sich längs einer zentralen Geraden durch die rotationssymmetrische Dosisverteilung ergibt. Ein anschauliches Konzept für einen rechnerischen Ansatz dafür ist die Vorstellung, dass der Strahl (mit der Fluenz ψ) festgehalten wird und sich die bestrahlte Fläche darin dreht. Für die Dosis an einem Punkt x (bzgl. der Rotationsachse) sind dann die Werte längs eines Kreis-

bogens $y = \sqrt{x^2 - \xi^2}$ mit ebendiesem Radius x zu mitteln:



$$p(x) = \frac{1}{2\pi x} \cdot 2 \int_{-x}^x \psi(\xi) dl, \quad \text{mit} \quad dl = \sqrt{1 + y'^2} d\xi = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{x^2}}}. \quad (6.1)$$

Auf diese Weise ergibt sich für das Dosisprofil ein Ausdruck, den man als *Rotationstransformation* bezeichnen könnte, da es sich um eine Integraltransformation von $\psi(x)$ nach $p(x)$ handelt. Diese Transformation bzw. dieses Dosisprofil kann auf verschiedene Weise formuliert werden:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(x\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi(x \sin(\xi)) d\xi. \quad (6.2)$$

Im einfachsten Fall (die „Standard-Situation“) wird man für die eingestrahelte Fluenz setzen:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & : a \leq x \leq b \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.3)$$

Dann erhält man als Profil – geschrieben in kompakter Form:

$$p(x) = \Re \left[\frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{b}{|x|} \right) - \arcsin \left(\frac{a}{|x|} \right) \right) \right] = \Re \left[\frac{1}{\pi} \left(\arccos \left(\frac{a}{|x|} \right) - \arccos \left(\frac{b}{|x|} \right) \right) \right]. \quad (6.4)$$

Abb. 6.1 zeigt dieses Ergebnis mit verschiedenen Werten für die linke Grenze a .

Natürlich gilt dieses schöne Ergebnis streng nur mit den oben gemachten idealisierten Annahmen, die nun wirklich nicht unwesentlich sind. Ein qualitativer Vergleich mit tatsächlichen Dosisprofilen (Abb. 6.2) zeigt aber, dass man damit den Effekt vom Prinzip her korrekt beschreibt; ein Hauptunterschied besteht in einer durch Streustrahlung bedingten Verunschärfung des Profils.

6.2 Das inverse Problem

Interessant ist aber vor allem die Umkehrung von Gl. (6.2), da dann die Berechnung des einzustrahlenden Fluenzprofils $\psi(x)$ aus einem Soll-Dosisprofil $p(x)$ möglich wird. Dazu wird diese Gleichung zunächst geschrieben als:

$$p(x) = \int_0^x \frac{g(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} d\xi \quad \text{mit} \quad g(\xi) := \frac{1}{\pi} (\psi(\xi) + \psi(-\xi)). \quad (6.5)$$

In dieser Form ist die Lösung der Transformation in der Literatur (z.B. [51] 1.1.41) zu finden; sie lautet:

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi \cdot p(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (6.6)$$

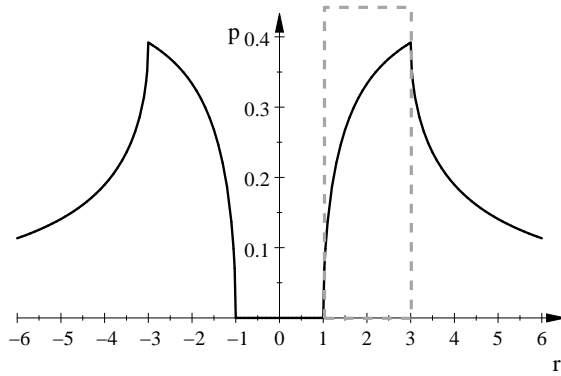
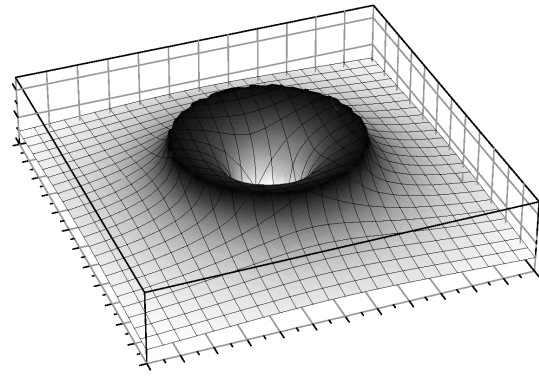
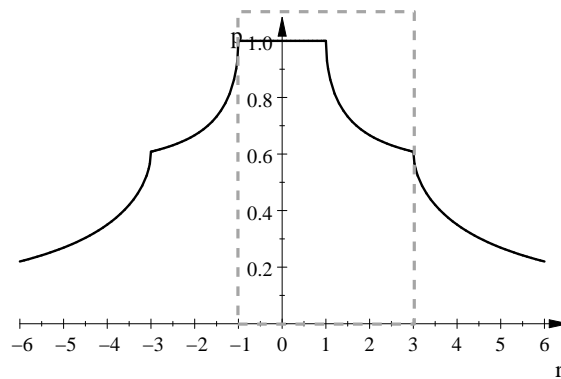
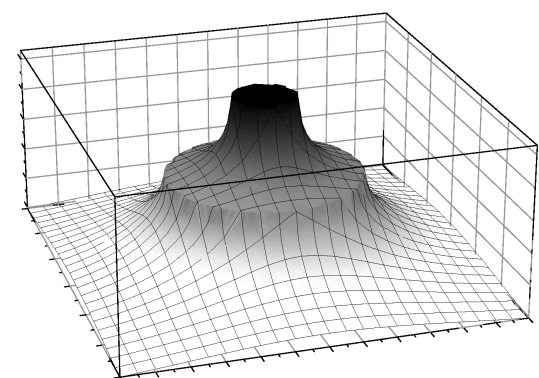
(a) Dosisprofil ($a = 1, b = 3$).(b) Dosisverteilung ($a = 1, b = 3$).(c) Dosisprofil ($a = -1, b = 3$).(d) Dosisverteilung ($a = -1, b = 3$).

Abbildung 6.1: Dosisprofil und -verteilung bei Rotationsbestrahlung mit konstanter Fluenz ψ (jeweils im gestrichelten Rahmen zwischen den Punkten a und b) nach Gl. (6.4). In den Teilbildern (c) und (d) handelt es sich genaugenommen um zwei Dosislevels – aber realisiert durch eine einzige Rotation.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann die Fluenz ψ als symmetrisch angesetzt werden, woraus $g(\xi) = 2/\pi \cdot \psi(\xi)$ folgt. Als Ergebnis für die Umkehrung von Gl. (6.2) findet sich damit:

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi \cdot p(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (6.7)$$

Es muss festgestellt werden, dass es sich hierbei um eine *lineare* Transformation handelt; schreibt man Gl. (6.7) formal als Operatorgleichung $\psi = \mathbf{IRoTra}(p)$, dann gilt:

$$\mathbf{IRoTra}(c_1 p_1 + c_2 p_2) = c_1 \cdot \mathbf{IRoTra}(p_1) + c_2 \cdot \mathbf{IRoTra}(p_2) = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2. \quad (6.8)$$

Für zwei Standard-Fälle soll dieses Ergebnis nun näher betrachtet werden.

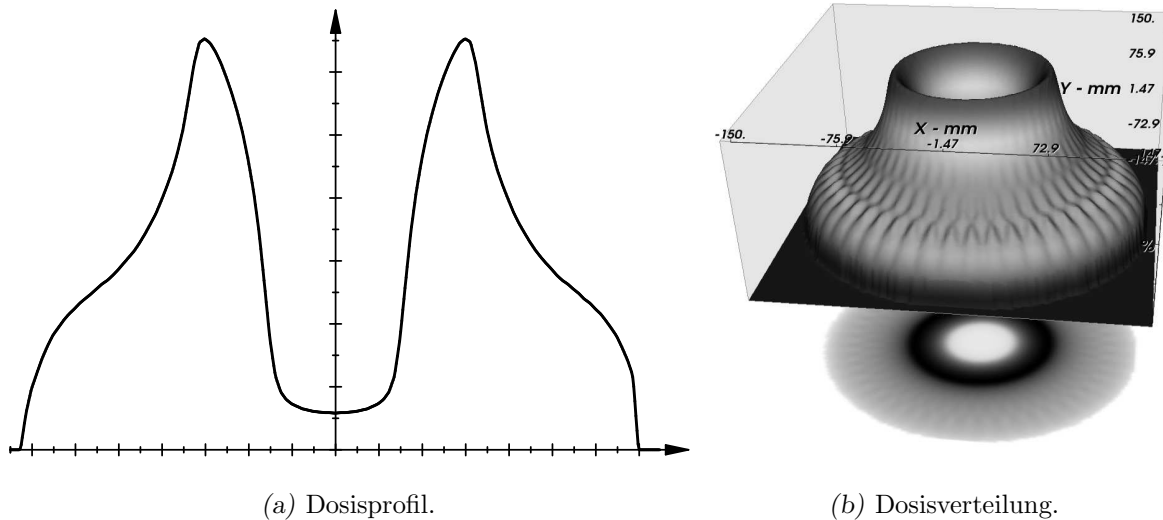


Abbildung 6.2: Dosisverteilung aus einer Vollrotation, berechnet mit dem Planungssystem Eclipse[™] von Varian[™]. Die Konfiguration entspricht im Prinzip der von Abbn. 6.1(a) und 6.1(b). Streustrahlung führt zu einer gewissen Verunschärfung. Der abrupte Dosisabfall zum Rand hin liegt daran, dass hier das Phantommedium endet.

6.2.1 Ein einzelnes Dosislevel

Das Dosisprofil p , das sich aus einer Rotation ergibt, soll nun sozusagen die Idealform besitzen:

$$p(x) = \begin{cases} D & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.9)$$

es handelt sich also um eine homogene radiale Dosisverteilung der Höhe D innerhalb der Radien a und b . Gl. (6.7) lässt sich nun leicht auswerten; für $0 < x < a$ folgt $\psi(x) = 0$, für $x > a$ gilt:

$$\psi(x) = D \cdot \frac{d}{dx} \int_a^\beta \frac{\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} d\xi = -D \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 - \xi^2} \Big|_{\xi=a}^\beta \quad \text{mit } \beta := \begin{cases} x & : x < b; \\ b & : x > b. \end{cases} \quad (6.10)$$

Insgesamt ergibt sich (wieder in kompakter Schreibweise):

$$\psi(x) = D \cdot \Re \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - b^2}} \right). \quad (6.11)$$

Dies ist in Abb. 6.3 dargestellt. Verständlicherweise treten für die Fluenz negative Werte auf, die daraus resultieren, dass die sich ergebende Dosis für Radien größer b zu Null kompensiert werden muss. Im Fall eines einzigen Dosislevels lassen sich negative Werte natürlich nicht realisieren. Etwas anders sieht es aus, wenn mehrere Levels aufeinander aufbauen.

6.2.2 Ein Dosislevel mit „Verfügungsgebiet“

Bei einem Sprung der Soll-Dosis von null auf einen endlichen Wert resultiert also ein unendlicher Peak in der Fluenz (bei Punkt a in Abb. 6.3). Steht aber innerhalb noch Raum für einen kontinuierlichen

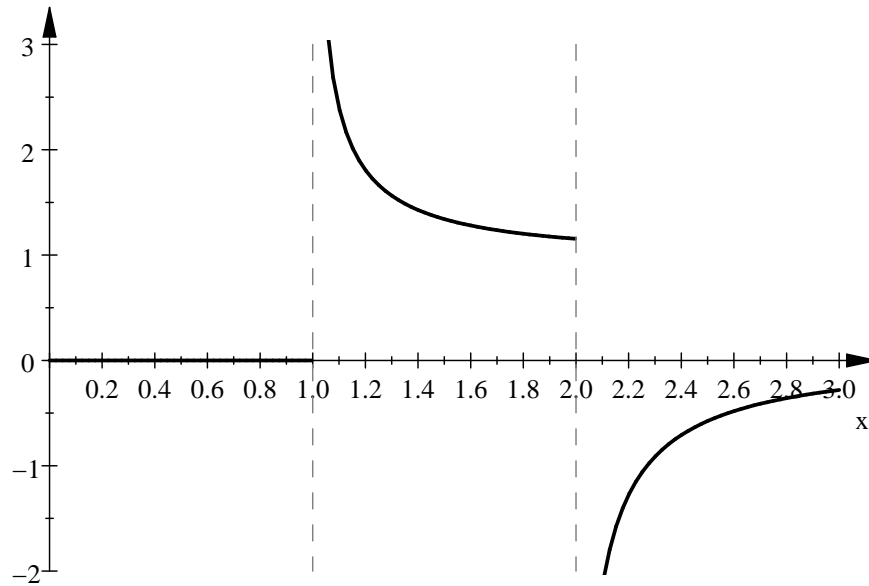


Abbildung 6.3: Fluenz zum Soll-Dosisprofil (6.9). Zudem ergeben sich negative Werte. (Verwendet: $D = 1, a = 1, b = 2.$)

Dosisanstieg zur Verfügung, dann kann dieser – ohnehin nicht realisierbare – Fluenz-Peak wirksam verhindert werden. Dies kann beispielsweise dadurch geschehen, die Soll-Dosis stetig und so zu wählen, dass für diesen Bereich eine konstante Fluenz (vgl. Gl. (6.4)) resultiert, also anzusetzen:

$$p(x) = \begin{cases} D \cdot \frac{\arccos\left(\frac{a}{x}\right)}{\arccos\left(\frac{a}{b}\right)} & : a < x < b, \\ D & : b < x < c, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.12)$$

In Abb. 6.4 ist dieser Dosisverlauf gezeigt. Dies eingesetzt in Gl. (6.7) liefert – nach längerer Rechnung – die Fluenzverteilung (siehe Abb. 6.5):

$$\psi(x) = \Re \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{\frac{x^2(a^2 - b^2)}{b^2(a^2 - x^2)}}}{\arccos\left(\frac{a}{b}\right)} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right\} \quad (6.13)$$

Der störende Peak in der Fluenz ist dadurch also völlig verschwunden.

6.2.3 Zwei Dosislevels

Das Profil mit zwei Dosislevels („integrated boost“) soll nun angesetzt werden als:

$$p(x) = \begin{cases} D_1 & : 0 < x < a \\ D_2 & : a < x < b \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.14)$$

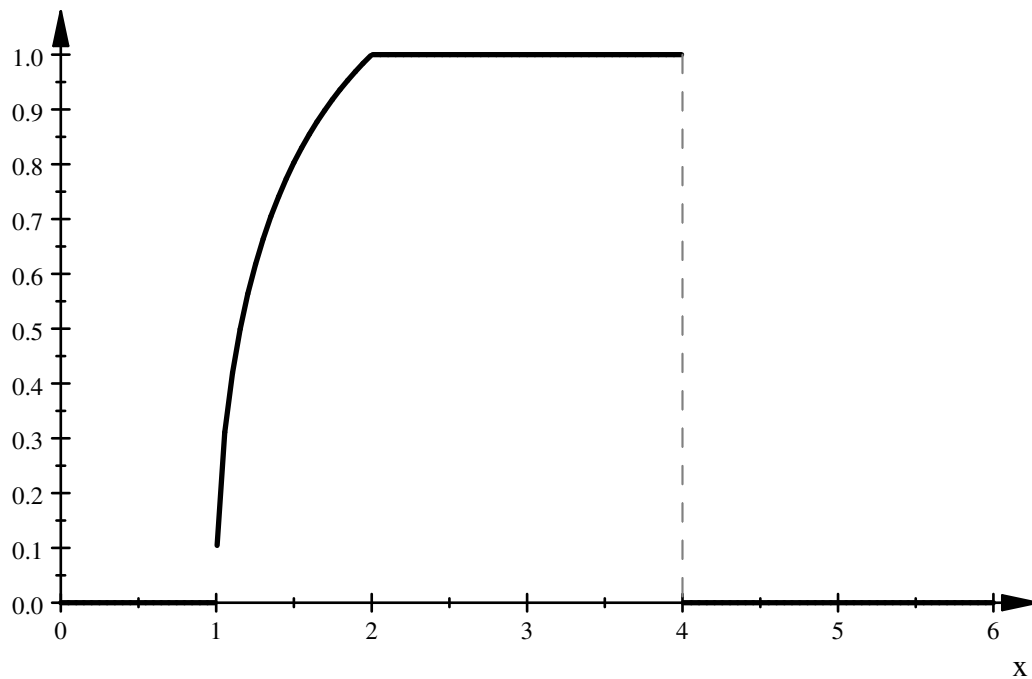


Abbildung 6.4: Stetiger Anstieg der Soll-Dosis gemäß Gl. (6.12).

(Verwendet: $D = 1, a = 1, b = 2, c = 4.$)

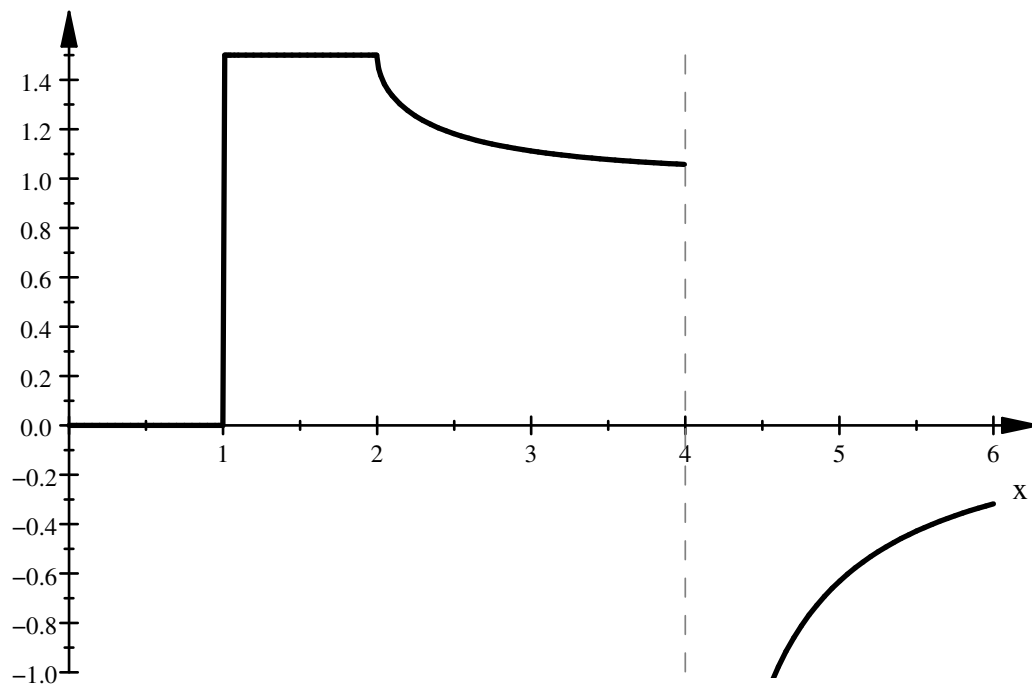


Abbildung 6.5: Endlicher Verlauf der Fluenz gemäß Gl. (6.13).

(Verwendet: $D = 1, a = 1, b = 2, c = 4.$)

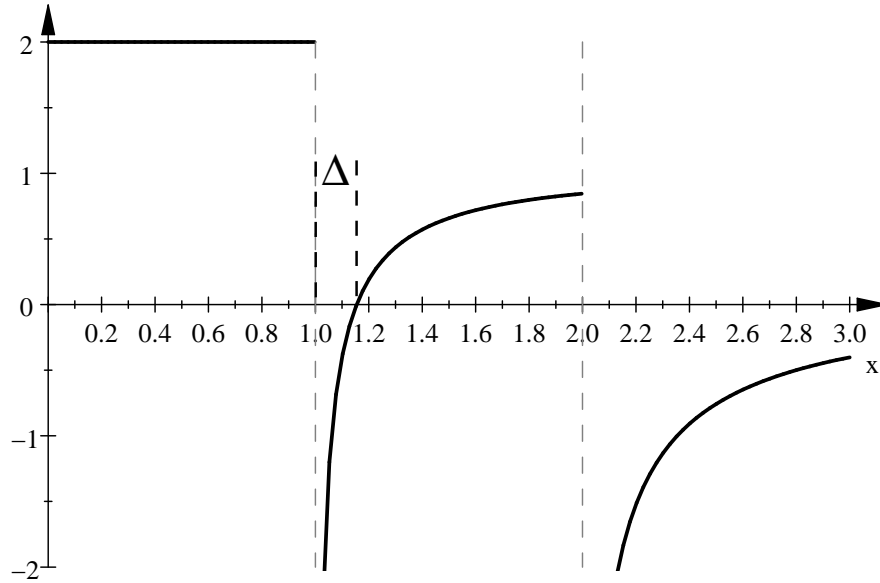


Abbildung 6.6: Fluenz zum Soll-Dosisprofil (6.14). Werden die negativen Werte zu Null gesetzt (was anders nicht realisierbar ist), ergibt sich eine Lücke der Breite Δ . (Verwendet: $D_1 = 2, D_2 = 1, a = 1, b = 2$.)

Wegen der Eigenschaft (6.8) lässt sich dafür das Ergebnis aus den Einzel-Levels linearkombinieren, und deshalb folgt sofort:

$$\psi(x) = D_1 - \Re \left(\frac{(D_1 - D_2)|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{D_2|x|}{\sqrt{x^2 - b^2}} \right) \quad (6.15)$$

In Abb. 6.6 ist dieses Fluenzprofil dargestellt. Natürlich ergeben sich weiterhin nichtrealisierbare negative Werte; am Übergang zwischen beiden Levels geschieht dies aber sozusagen von einem höheren Niveau aus. Setzt man für die Realisierbarkeit alle negativen Werte auf Null, dann führt dies zur Ausbildung einer deutlichen Lücke in der Fluenz. Die Breite Δ dieser Lücke lässt sich leicht aus Gl. (6.15) berechnen:

$$\Delta = a \cdot \left(\frac{D_1}{\sqrt{2D_1D_2 - D_2^2}} - 1 \right). \quad (6.16)$$

6.3 Approximation durch Standard-Rotationen

Eine ganz praktische Fragestellung könnte lauten: *Wie kann – zur Erzeugung eines möglichst homogenen Dosisprofils nach Gl. (6.9) – die Fluenz (6.11) bestmöglich mit der Rotation zweier offener Felder approximiert werden?*

Sei im Folgenden der Einfachheit halber $0 < a < x < b$, dann besteht das Problem in der abschnittsweise konstanten Annäherung an die Funktion $\psi(x) = x/\sqrt{x^2 - a^2}$ im Intervall $]a, b]$. Ein möglicher Ansatz dazu liegt in der Minimierung des Ausdrucks

$$F := \int_a^\xi (\psi(x) - \lambda_1)^2 dx + \int_\xi^b (\psi(x) - \lambda_2)^2 dx \quad (6.17)$$

nach λ_1 , λ_2 und ξ (siehe Abb. 6.7).

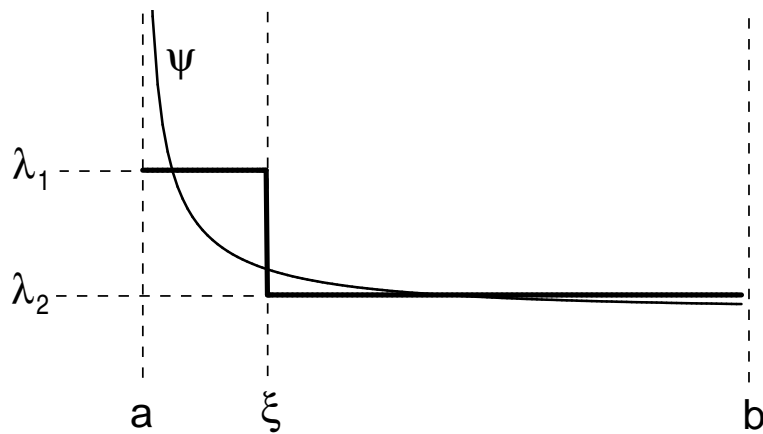


Abbildung 6.7: Modell der Näherung der Funktion $\psi(x)$ durch zwei Rechteckfunktionen.

Sofort ergibt sich dann allgemein:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \stackrel{!}{=} 0 \implies \lambda_1 = \frac{1}{\xi - a} \int_a^\xi \psi(x) dx = \langle \psi \rangle_{[a, \xi]}; \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \stackrel{!}{=} 0 \implies \lambda_2 = \frac{1}{b - \xi} \int_\xi^b \psi(x) dx = \langle \psi \rangle_{[\xi, b]}; \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \stackrel{!}{=} 0 \implies \psi(\xi) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \quad (6.20)$$

Die λ 's als konstante Niveaus sind also schlicht die ψ -Mittelwerte innerhalb ihres Intervalls und der Wert der Fluenz am Ort ξ des Übergangs zeigt sich als arithmetisches Mittel dieser Niveaus – ein interessantes Ergebnis! Wird nun konkret die Form von ψ eingesetzt, dann erhält man:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\xi + a}{\xi - a}}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{b - \xi} \left(\sqrt{b^2 - a^2} - \sqrt{\xi^2 - a^2} \right). \quad (6.21)$$

Aus Gl. (6.20) sollte sich somit ξ – zumindest numerisch – berechnen lassen. Leider stellt sich heraus, dass diese Gleichung im Intervall $]a, b[$ offenbar keine Lösung besitzt.

Um dennoch zu einer analytischen Näherung zu gelangen, kann man sich daran erinnern, dass die λ 's Intervallmittelwerte darstellen und $\psi(\xi)$ davon wieder der Mittelwert ist, also:

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2} \left(\langle \psi \rangle_{[a, \xi]} + \langle \psi \rangle_{[\xi, b]} \right) \approx \langle \psi \rangle_{[a, b]}. \quad (6.22)$$

Ein näherungsweise Lösungsansatz lautet damit

$$\psi(\xi) \stackrel{!}{=} \langle \psi \rangle_{[a, b]}; \quad (6.23)$$

auf diese Weise ergibt sich der einfache Ausdruck:

$$\xi = \sqrt{\frac{a(a+b)}{2}}, \quad (6.24)$$

der dann außerdem in den Gln. (6.21) zu verwenden ist. Dieses Ergebnis ist in Abb. 6.8 gezeigt.

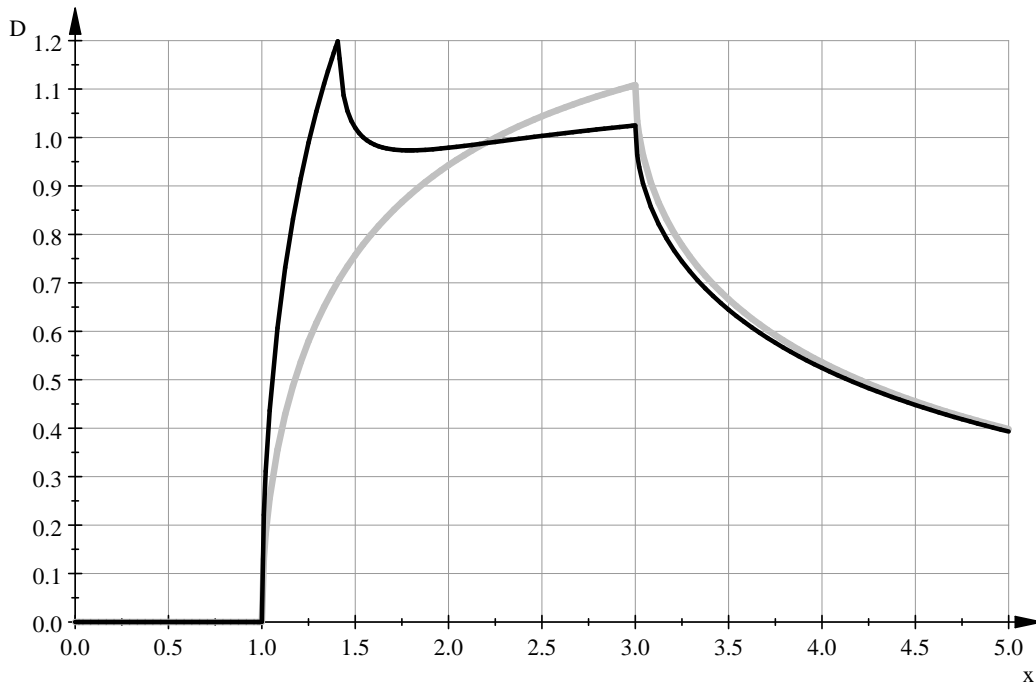


Abbildung 6.8: Resultierendes Dosisprofil nach zwei Rotationen gemäß der gemachten Approximation. (Verwendet: $a = 1, b = 3$.) Zum Vergleich in grau: Profil mit nur einer Rotation.)

6.4 „Inverse Planung“ unter Rotationssymmetrie

Mit den oben hergeleiteten Transformationen (6.2)(6.7) zwischen Fluenz- und Dosisprofil lassen sich gut grundlegende Eigenschaften der IMRT, bei der typischerweise viele Einstrahlrichtungen verwendet werden, herausarbeiten. Ein zentraler Punkt besteht dort in der „inversen Planung“, also in der Methodik, durch Formulierung einer „Wunsch-Dosisverteilung“ zu den dazu passenden Fluenzen zu gelangen. Genau dies leistet im rotationssymmetrischen Spezialfall die Gl. (6.7). Durch anschließendes Weglassen der nichtrealisierbaren negativen Anteile der Fluenz und durch Anwenden von Gl. (6.2) gelangt man schließlich zur realisierbaren Dosisverteilung. Am Beispiel von einem und von zwei Dosisniveaus ist dies in Abbn. 6.9 und 6.10 gezeigt. Die Gleichungen für die letztendliche realisierbare Dosisverteilung lauten:

bei einem Dosislevel: (vgl. Gl. (6.4))

$$D(x) = D \cdot \frac{2}{\pi} \Re \left(\arcsin \frac{a}{|x|} \right); \quad (6.25)$$

bei zwei Dosislevels: Als Fluenz wird verwendet (vgl. Gl. (6.15): bzw. Abb. 6.6)

$$\psi(x) = \begin{cases} D_1 & : x < a; \\ D_1 - \frac{D_1 - D_2}{\sqrt{x^2 - a^2}} & : a < x < b; \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.26)$$

Dies – eingesetzt in Gl. (6.2) – führt schließlich auf die Dosisverteilung:

$$\begin{aligned}
 D(x) = \Re \left\{ D_1 \cdot \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{|x|} + \arcsin \frac{b}{|x|} - \arcsin \frac{x_0}{|x|} \right] + \right. \\
 \left. + (D_1 - D_2) \cdot \frac{2}{\pi} \left[\arctan \sqrt{\frac{x^2 - b^2}{b^2 - a^2}} - \arctan \sqrt{\frac{x^2 - x_0^2}{x_0^2 - a^2}} \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

dabei bezeichnet x_0 die Nullstelle der Fluenz:

$$x_0 = a \cdot \frac{D_1}{2D_1D_2 - D_2^2}. \tag{6.28}$$

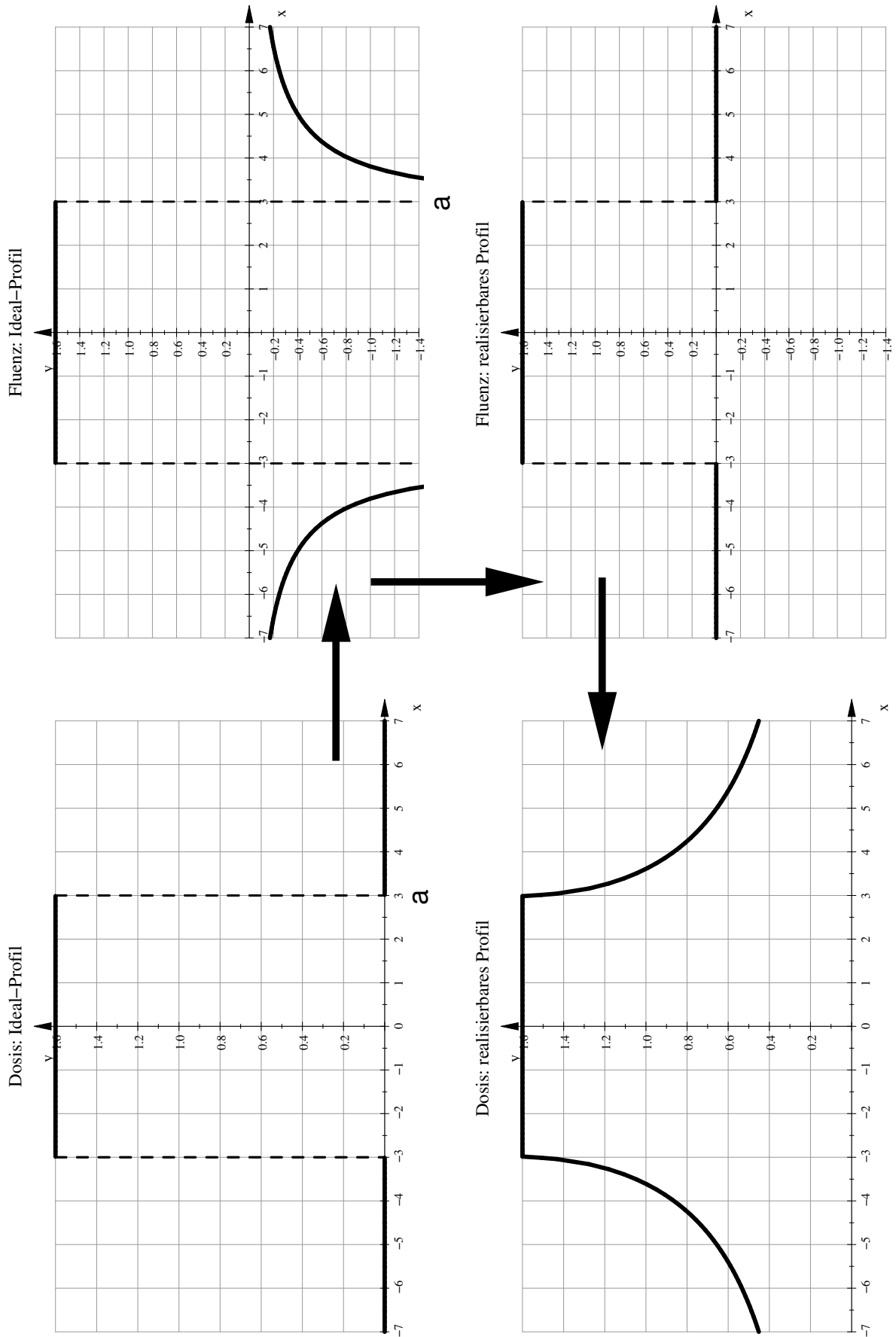


Abbildung 6.9: Ein Dosislevel: Von der Soll-Dosisverteilung zur Fluenz, und wieder zurück zur realisierbaren Dosisverteilung.

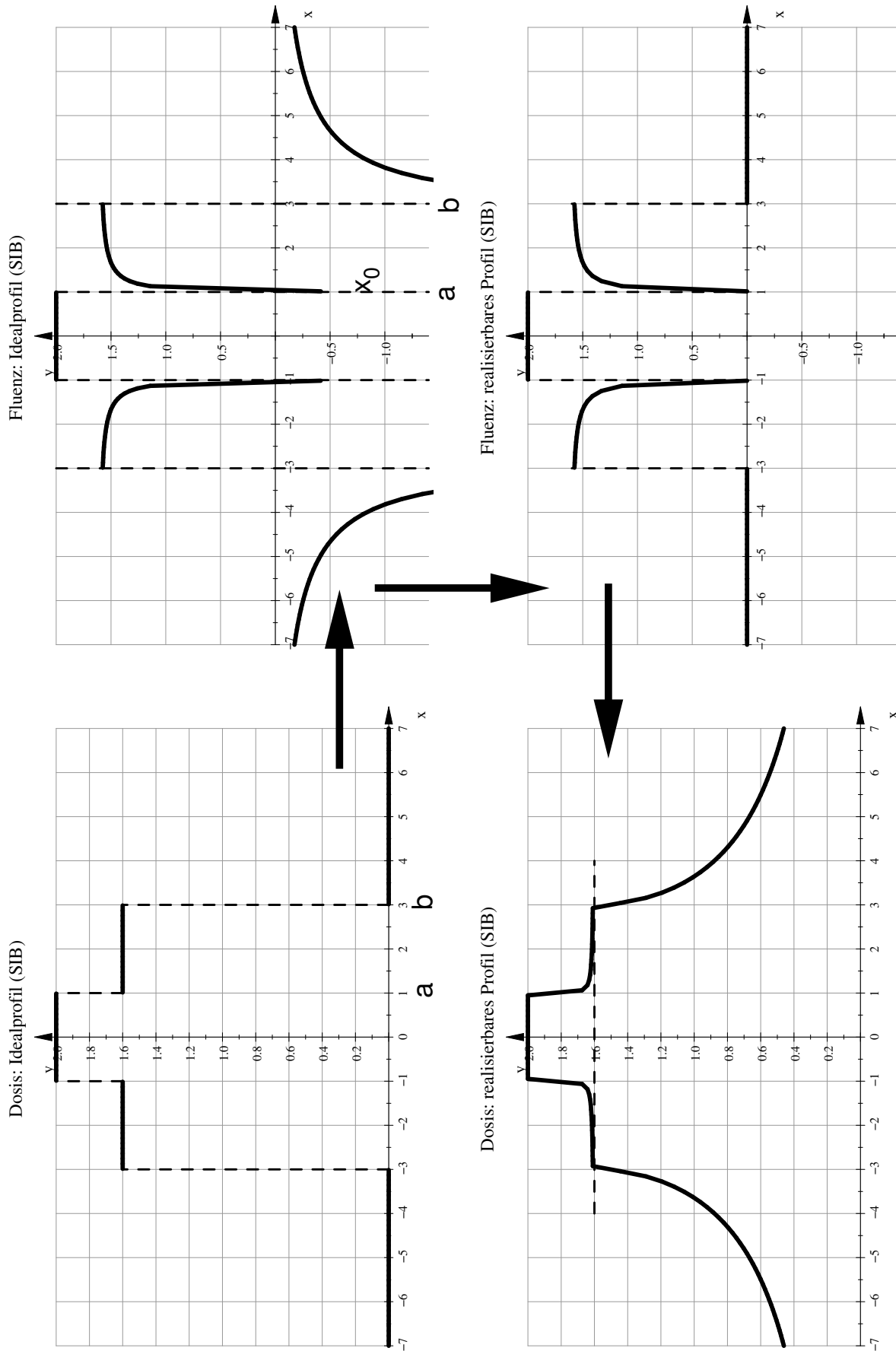


Abbildung 6.10: Zwei Dosislevel („integrierter Boost“): Von der Soll-Dosisverteilung zur Fluenz, und wieder zurück zur realisierbaren Dosisverteilung.

6.5 Zugang mittels Fourier–Transformation

Ein weiterer möglicher Zugang zu dieser Problemstellung soll – wenn hier auch nicht weiter verfolgt – nun skizziert werden. Dazu wird zunächst die zweidimensionale Dosisverteilung $p(x, y)$ betrachtet, die sich aus einem unter konstituierlicher Drehung aufintegrierten Fluenzprofil $\psi(x)$ ergibt (also die ursprünglichste Formulierung des Problems):

$$p(x, y) = \int_0^{2\pi} \psi(x \cos \phi + y \sin \phi) d\phi. \quad (6.29)$$

Dieser Ausdruck ist wohl nicht weiter auswertbar, aber die Fourier–Transformierte kann davon berechnet werden. Es werden dabei Drehungen im Ortsraum

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

und im Fourier–Raum

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_u \\ \kappa_v \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

verwendet. So lässt sich direkt rechnen:

$$\begin{aligned} p(x, y) &\circ\!\!\!\rightarrow \bullet \int \int \int_0^{2\pi} d\phi \psi(x \cos(\phi) + y \sin(\phi)) e^{-2\pi i(\kappa_x x + \kappa_y y)} dx dy = \\ &\int \int \int_0^{2\pi} d\phi \psi(u) e^{-2\pi i(\kappa_x(u \cos \phi - v \sin \phi) + \kappa_y(u \sin \phi + v \cos \phi))} du dv = \\ &\int \int \int_0^{2\pi} d\phi \psi(u) e^{-2\pi i(\kappa_u u + \kappa_v v)} du dv = \int_0^{2\pi} \Psi(\kappa_u) \delta(\kappa_v) d\phi, \end{aligned}$$

mit $\psi \circ\!\!\!\rightarrow \bullet \Psi$. Wegen der Abhängigkeit vom Winkel ϕ wird nun auf Polarkoordinaten übergegangen:

$$\kappa_x = \rho \cos \alpha, \quad \kappa_y = \rho \sin \alpha,$$

und also

$$\begin{aligned} \kappa_u &= \rho(\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi) = \rho \cos(\phi - \alpha), \\ \kappa_v &= \rho(-\cos \alpha \sin \phi + \sin \alpha \cos \phi) = -\rho \sin(\phi - \alpha). \end{aligned}$$

Damit und mit $\gamma := \phi - \alpha$ lässt sich die Rechnung weiterführen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Psi(\kappa_u) \delta(\kappa_v) d\phi &= \int_{-\alpha}^{-\alpha+2\pi} \Psi(\rho \cos \gamma) \delta(-\rho \sin \gamma) d\gamma = \\ &= \int_{-\alpha}^{-\alpha+2\pi} \Psi(\rho \cos \gamma) \frac{\delta(\gamma - 0) + \delta(\gamma - \pi)}{|\rho|} d\gamma = \frac{\Psi(\rho) + \Psi(-\rho)}{|\rho|}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst lautet das überraschend kompakte Ergebnis also:

$$p(x, y) = \int_0^{2\pi} \psi(x \cos \phi + y \sin \phi) d\phi \quad \circ \rightarrow \bullet \quad P(\rho) = \frac{\Psi(\rho) + \Psi(-\rho)}{|\rho|}. \quad (6.32)$$

Die radialsymmetrischen Funktionen $p(x, y) = p(r)$ und $P(\rho)$ gehen somit über eine Hankel-Transformation (Kap. 1.3.3) auseinander hervor:

$$p(r) = 2\pi \int_0^{\infty} P(\rho) J_0(2\pi\rho r) \rho d\rho, \quad (6.33)$$

$$P(\rho) = \frac{\Psi(\rho) + \Psi(-\rho)}{|\rho|} = 2\pi \int_0^{\infty} p(r) J_0(2\pi\rho r) r dr. \quad (6.34)$$

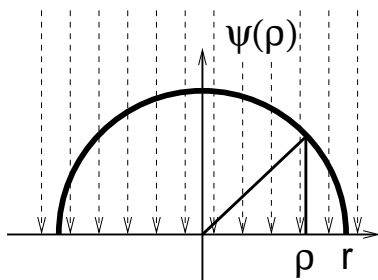
Aufgrund des Fourier-Schicht-Theorems (Kap. 1.4.1) ergibt sich schließlich noch der Zusammenhang:

$$\mu(x) * (\psi(x) + \psi(-x)) = 2 \int_x^{\infty} \frac{p(r)r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr; \quad (6.35)$$

$\mu(x)$ bezeichnet dabei die Fourier-Transformierte einer Approximation der Funktion $1/|\kappa|$, die transformierbar ist. Die Gleichungen (6.34) und (6.35) könnten dann einen Ansatz zur Berechnung der Fluenz ψ aus den Vorgaben des Dosisprofils p liefern.

6.6 „3D-Rotation“

Das oben demonstrierte Verfahren zur Annäherung an die Rotationsbestrahlung um eine Achse kann analog auf die Fragestellung einer gleichförmigen Bestrahlung aus allen Raumwinkeln erweitert werden. Das Problem ist dann äquivalent zur Einstrahlung aus nur einer Richtung (im Folgenden o.E.d.A. aus \vec{z}), dann aber bei 3D-Drehung des bestrahlten Volumens. Der Wert $p(r)$ ergibt sich so als Mittelung der Werte über ein Kugelschale mit Radius r . Der Einfachheit halber wird die eingestrahelte Fluenz ψ als rotationssymmetrisch zum Zentralstrahl angenommen, d.h. $\psi = \psi(r)$; dies stellt aber keine wirkliche Einschränkung dar. Zu mitteln ist also über eine Halbsphäre F :



$$p(r) = \frac{1}{N_F} \int_F \psi(\rho) dF. \quad (6.36)$$

Diese Halbsphäre ist darstellbar als Rotationskörper eines um die z -Achse rotierenden Kreisbogens $y = \sqrt{r^2 - \rho^2}$

$$\Rightarrow dF = \rho d\phi dl, \quad \text{mit Bogenstück} \quad dl = \sqrt{d\rho^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - \rho^2}} d\rho;$$

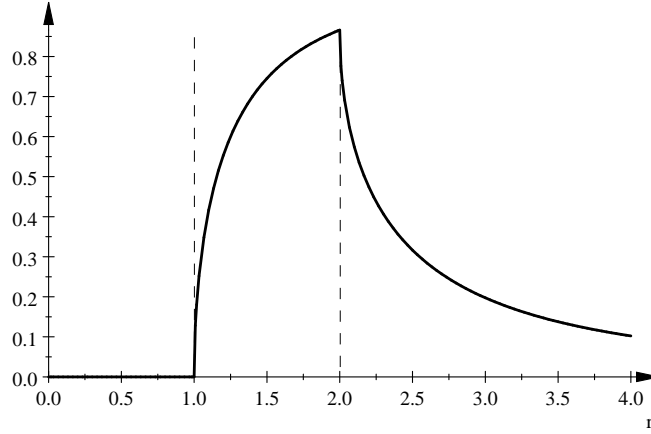


Abbildung 6.11: Dosisprofil bei 3D-Rotationsbestrahlung gemäß Gl. (6.39) mit ringförmig konstanter Fluenz nach Gl. (6.38). (Verwendet: $a = 1, b = 2$.)

normiert werden muss mit der Fläche der Halbsphäre $N_F = 2\pi r^2$. Damit ergibt sich insgesamt, sozusagen als „3D-Rotationstransformation“:

$$p(r) = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \psi(\rho) \rho \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\psi(\rho) \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho. \quad (6.37)$$

Wird also – im einfachsten Fall – mit einer ringförmig konstanten Fluenz eingestrahlt:

$$\psi(r) = \begin{cases} 1 & : a \leq r \leq b, \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.38)$$

dann resultiert als Profil (Abb. 6.11):

$$p(r) = \frac{1}{r} \Re \left(\sqrt{r^2 - a^2} - \sqrt{r^2 - b^2} \right). \quad (6.39)$$

Interessant ist auch hier wieder die Inversion der Transformation (6.37). Nach Substitution $\gamma := r^2, \xi := \rho^2$ wird Gl. (6.37) zu

$$2\sqrt{\gamma} \cdot p(\sqrt{\gamma}) = \int_0^\gamma \frac{\psi(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\gamma - \xi}} d\xi. \quad (6.40)$$

In dieser Form ist die Integralgleichung in der Standardliteratur zu finden; die Lösung lautet (z.B. [51] 1.1.36):

$$\psi(\sqrt{\gamma}) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\gamma} \int_0^\gamma \frac{2\sqrt{\xi} \cdot p(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\gamma - \xi}} d\xi, \quad (6.41)$$

woraus man schließlich nach Rücksubstitution als Ergebnis erhält:

$$\psi(r) = \frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\rho^2 \cdot p(\rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho. \quad (6.42)$$

Auch hier handelt es sich um eine lineare Transformation im Sinne von Gl. (6.8).

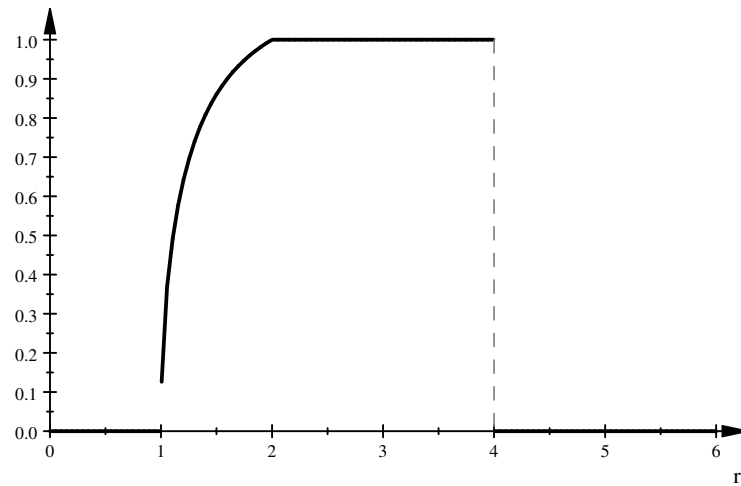


Abbildung 6.13: Stetiger Anstieg der Soll-Dosis gemäß Gl. (6.45).
(Verwendet: $D = 1, a = 1, b = 2, c = 4$.)

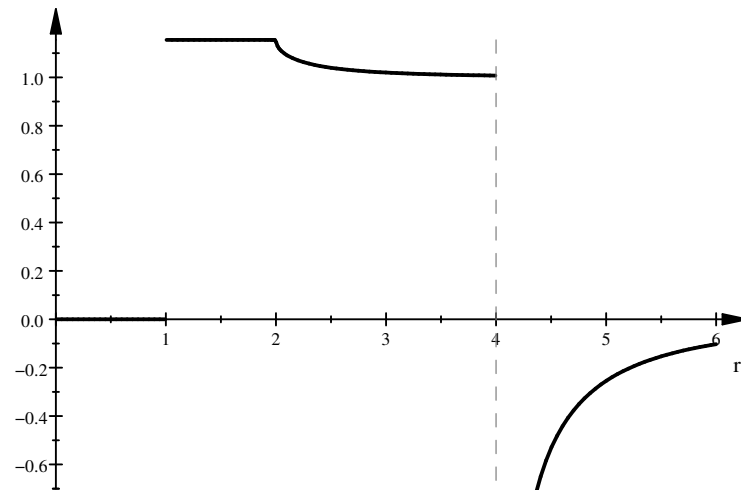


Abbildung 6.14: Endlicher Verlauf der Fluenz gemäß Gl. (6.46).
(Verwendet: $D = 1, a = 1, b = 2, c = 4$.)

In der Konsequenz findet man daraus gemäß Gl. (6.42) – und nach längerer Rechnung:

$$\psi(r) = \frac{D}{\pi} \Re \left\{ \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arccos \left(1 - \frac{2 \cdot (b^2 - a^2)}{r^2 - a^2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \cdot \left(\arccos \left(\frac{b}{r} \right) - \arccos \left(\frac{c}{r} \right) - \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right) \right\}. \quad (6.46)$$

Wie erwartet resultiert auch hier wieder eine ausgewogene Fluenzverteilung, die insbesondere frei von störender Divergenz ist. In Abb. 6.13 ist diese Soll-Dosisverteilung, in Abb. 6.14 die zugehörige Fluenzverteilung gezeigt.

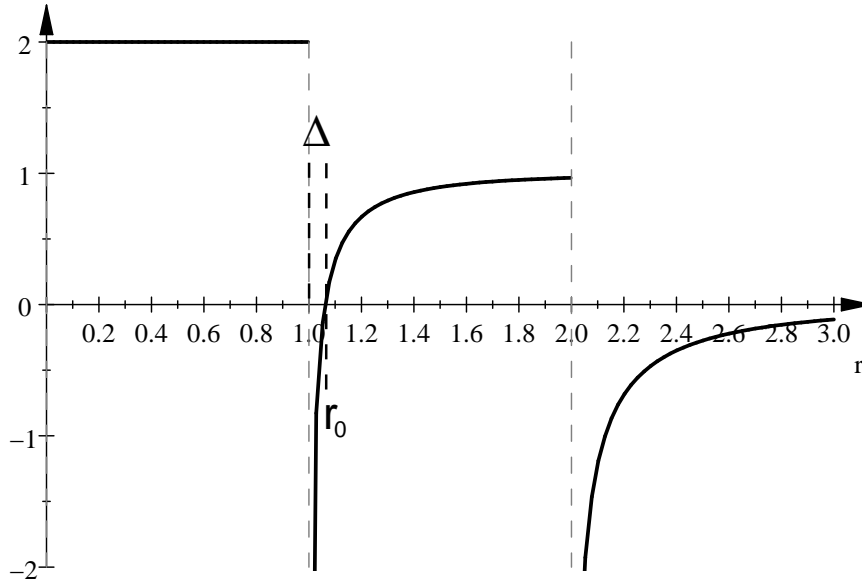


Abbildung 6.15: Fluenzprofil gemäß Gl. (6.48). Auch hier zeigt sich wieder eine Fluenzlücke. (Verwendet: $D_1 = 2, D_2 = 1, a = 1, b = 2$.)

Für zwei homogene Dosislevels, d.h.:

$$p(r) = \begin{array}{c} \text{p} \uparrow \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{D1} & \text{D2} & \\ \hline \end{array} \\ \text{r} \end{array} \quad (6.47)$$

kann wegen der beschriebenen Linearität die Fluenz aus den Einzel-Leveln linearkombiniert werden:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= D_1 \cdot \psi_0^a + D_2 \cdot \psi_a^b = \\ &= D_1 - (D_1 - D_2) \frac{2}{\pi} \cdot \Re \left(\arccos \frac{a}{r} + \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) - D_2 \frac{2}{\pi} \cdot \Re \left(\arccos \frac{b}{r} + \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}} \right). \end{aligned} \quad (6.48)$$

In Abb. 6.15 ist dieses Profil der Fluenz gezeigt. Auch hier tritt wieder eine Lücke in der Fluenz auf; die Bestimmungsgleichung für die Nullstelle bei r_0 lautet (da $a < r_0 < b$):

$$\delta = \arccos \frac{a}{r_0} + \frac{a}{\sqrt{r_0^2 - a^2}}, \quad \text{mit } \delta := \frac{\pi D_1}{2(D_1 - D_2)}; \quad (6.49)$$

diese transzendente Gleichung ist nur näherungsweise lösbar. Als Approximation erhält man dann für die Breite Δ der Lücke:

$$\Delta = r_0 - a \approx a \left[\delta \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\delta^2}} \right)} - 1 \right]. \quad (6.50)$$

Diese Näherung gilt für „kleine“ Δ , d.h. für $\Delta/a \ll 1$.

Kapitel 7

Fluenzmodulation

7.1 Keilfilter

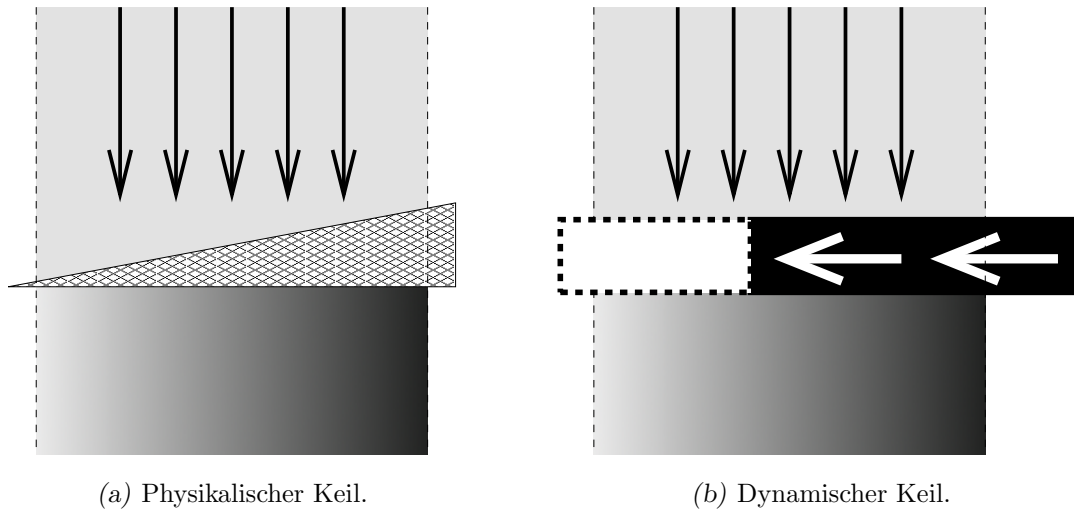
Zur Optimierung von Dosisverteilungen ist es oft hilfreich, Strahlungsfelder zur Verfügung zu haben, deren Isodosenflächen einen spezifischen Winkel gegenüber der Horizontalen aufweisen. Erreicht wird dies mit Keilfiltern, die den Primärstrahl geeignet modifizieren. Grundsätzlich gibt es zwei Typen von Keilfiltern:

Physikalische (d.h. „hardware“–) Keilfilter: Der Name impliziert bereits dessen Aussehen und Funktionsweise; eine Metallplatte, die (in etwa) Keilform besitzt, schwächt den Primärstrahl in genau der Weise, dass sich ein bestimmter Isodosenwinkel („Keilwinkel“) ergibt, Abb. 7.1(a). (Der Begriff „Keilwinkel“ bezieht sich also auf genau diesen Winkel und nicht etwa auf den Winkel der keilförmigen Filterplatte!) Die exakte Definition des Keilwinkels für physikalische Keilfilter ist in Abb. 7.2(a) angegeben.

Dynamische Keilfilter: Bei dieser Methode fährt während der Strahlzeit eine Blende ins offene Feld, womit ebenfalls eine Angulierung der Isodosen erreicht werden kann, Abb. 7.1(b). Der Begriff „Filter“ ist hier also nicht wörtlich zu nehmen, sondern in der Analogie bzgl. der Wirkung zu verstehen. Für dynamische Keilfilter gibt es eine spezielle Definition des Keilwinkels, siehe Abb. 7.2(b).

Dynamische Keilfilter bieten einige Vorteile gegenüber den physikalischen:

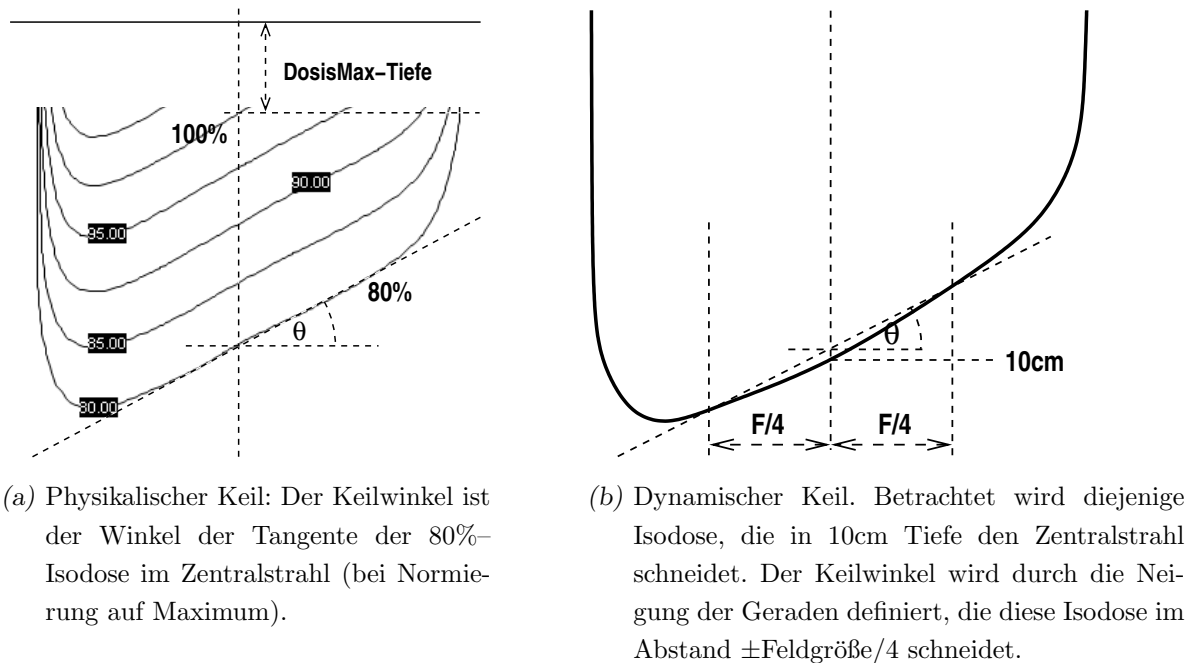
- Weil kein zusätzliches Filtermedium durchstrahlt wird, tritt keine weitere Strahlaufhärtung, d.h. keine Veränderung des Spektrums gegenüber dem offenen Feld auf;
- aus diesem Grund bleiben Querprofil senkrecht zur Keilrichtung und Tiefendosisprofil im Wesentlichen unverändert [52];
- es entsteht keine zusätzliche Streustrahlung (wie bei physikalischen Filtern);
- manuelle Filterwechsel entfallen, d.h. besseres Handling, kürzere Bestrahlzeiten, etc.; außerdem bleibt bei Einstellungen das Lichtfeld stets sichtbar.



(a) Physikalischer Keil.

(b) Dynamischer Keil.

Abbildung 7.1: Keilfilter: Funktionsprinzip.



(a) Physikalischer Keil: Der Keilwinkel ist der Winkel der Tangente der 80%–Isodose im Zentralstrahl (bei Normierung auf Maximum).

(b) Dynamischer Keil. Betrachtet wird diejenige Isodose, die in 10cm Tiefe den Zentralstrahl schneidet. Der Keilwinkel wird durch die Neigung der Geraden definiert, die diese Isodose im Abstand \pm Feldgröße/4 schneidet.

Abbildung 7.2: Definitionen des Keilfilterwinkels.

7.1.1 Prinzip des Universal–Keilfilters

Speziell bei physikalischen Keilfiltern gibt es für jeden der zur Verfügung stehenden Keilwinkel eine eigene Ausführung des Filters. Dies muss aber nicht zwingend so sein: Die Linearkombination eines Keilfilterfeldes (mit Winkel ϑ_w) und eines offenen Feldes ermöglicht die Realisierung eines beliebigen effektiven Keilwinkels $\vartheta \leq \vartheta_w$, siehe Abb. 7.3. Ein einzelner Keilfilter (mit möglichst großem ϑ_w) ist also ausreichend und kann – z.B. im Strahlerkopf eingebaut – motorisiert in den Strahlengang gefahren werden; ein Wechselsystem für kleinere Keilwinkel ist nicht nötig.

Die Standard–Herleitung zur Berechnung der Anteile von offenem und Keilfeld findet sich in [53]:

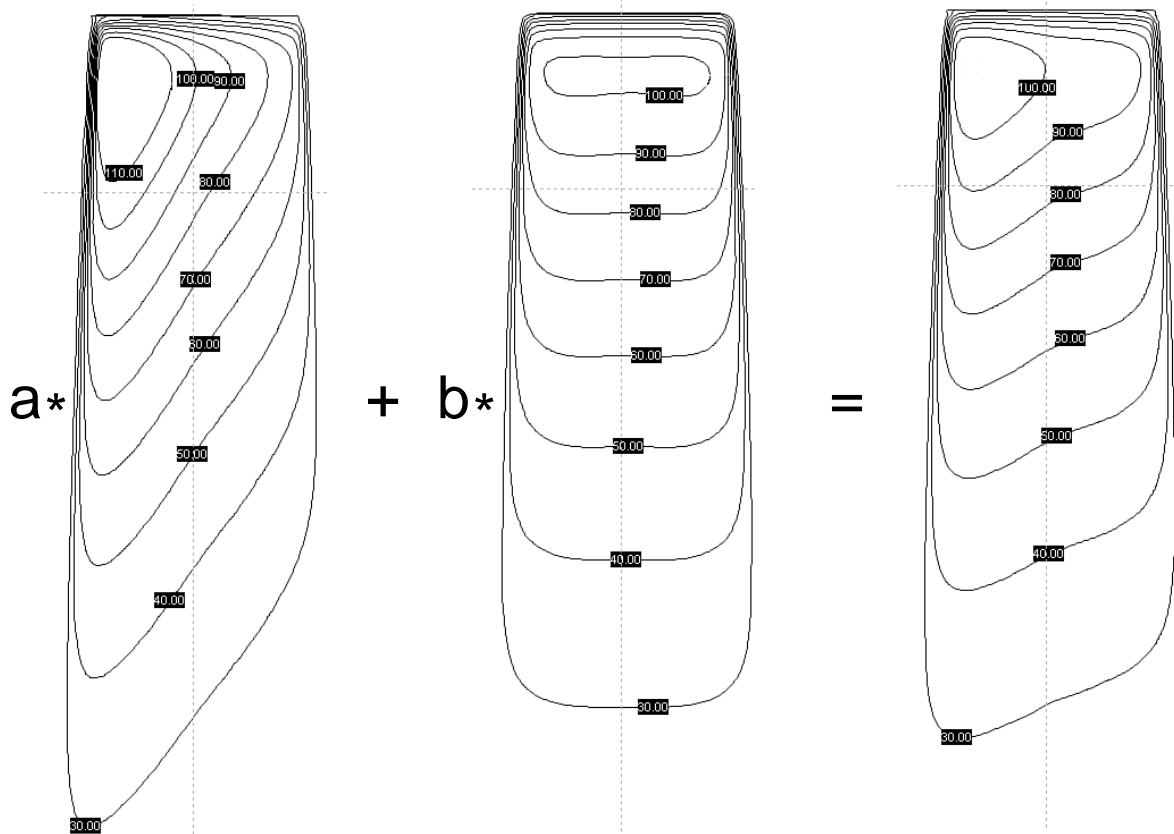


Abbildung 7.3: Prinzip des Universal-Keilfilters: Variation des Keilwinkels durch Beimischung eines offenen Feldes.

Allgemein berechnet sich der Tangentialwinkel ϑ einer Isodose bei einer bestimmten Dosisverteilung D :

$$\tan \vartheta = \frac{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right)}; \quad (7.1)$$

(hier bezeichnet x die horizontale Koordinate (d.h. in Keilrichtung) und z die vertikale Koordinate.) Die Dosisverteilung soll bestehen aus den Dosisanteilen eines offenen Feldes D_o und eines Keilfeldes D_w :

$$D = a_N D_o + b_N D_w; \quad (\text{mit Normierung: } a_N + b_N = 1). \quad (7.2)$$

Dann folgt:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = b_N \cdot \frac{\partial}{\partial x} D_w; \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = a_N \cdot \frac{\partial}{\partial z} D_o + b_N \cdot \frac{\partial}{\partial z} D_w. \quad (7.4)$$

Für den effektiven Keilwinkel ergibt sich damit:

$$\tan \vartheta = \frac{b_N \cdot \frac{\partial}{\partial x} D_w}{a_N \cdot \frac{\partial}{\partial z} D_o + b_N \cdot \frac{\partial}{\partial z} D_w} = \frac{b_N \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x} D_w}{\frac{\partial}{\partial z} D_w}}{a_N \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial z} D_o}{\frac{\partial}{\partial z} D_w} + b_N}. \quad (7.5)$$

Der Zähler bezieht sich rein auf das Keilfeld und beschreibt dessen Keilwinkel:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} D_w}{\frac{\partial}{\partial z} D_w} = \tan \vartheta_w; \quad (7.6)$$

der Ausdruck im Nenner $(\frac{\partial}{\partial z}D_o) / (\frac{\partial}{\partial z}D_w)$ beschreibt das Verhältnis der Steigungen der Tiefendosisverläufe von offenem Feld und Keilfeld. Diese Tiefendosisverläufe unterscheiden sich hauptsächlich in Streuung und Strahlaufhärtung. Bleiben diese beiden Effekte – in offenbar guter Näherung – unberücksichtigt, dann kann man setzen:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}D_o}{\frac{\partial}{\partial z}D_w} \approx 1. \quad (7.7)$$

Gl. (7.5) vereinfacht sich so zu:

$$\tan \vartheta = b_N \tan \vartheta_w, \quad \text{bzw.} \quad b_N = 1 - a_N = \frac{\tan \vartheta}{\tan \vartheta_w} \quad (7.8)$$

7.1.2 Implementierung dynamischer Keile

Während die Implementierung physikalischer Keilfilter vergleichsweise anschaulich ist, sind für dynamische Keilfilter elaboriertere Konzepte notwendig. Im Folgenden wird das Konzept der Firma Varian™ skizziert. Dort ist die dynamische Keilfilterwirkung nur durch eine der beiden y -Blenden möglich, indem die betreffende Blende in den Strahlengang einfährt. Der Maximalbereich umfasst $y = -20\text{cm}$ (Blende max. offen) bis $y = +10\text{cm}$ (Blende max. ausgefahren); bei $y=0$ berührt die Blende den Zentralstrahl.

Die Zuordnung der abgestrahlten Primärfluenz zur Position der dynamischen Blende ist tabellarisch in sog. STT („segmented treatment tables“) festgeschrieben. Erste Implementierungen sahen für jede Kombination aus Keilwinkel und Feldgröße eine eigene STT vor, was dazu führte, dass dann insgesamt für jede Energie 132 STT zu verwenden waren [52]. Mittlerweile wird für jede Energie nur noch eine *einzig*e STT benötigt, die die ehrenvolle Bezeichnung „golden STT“ trägt. Möglich wurde dies hauptsächlich durch Anwenden des Prinzips des Universal-Keilfilters (Kap. 7.1.1). Die sich daraus ergebende STT wird zudem nicht etwa nach der Feldlage verschoben, sondern bis auf Skalierung/Normierung so angewandt, „wie sie ist“. Damit wird im Grunde das Verhalten eines physikalischen Keils imitiert: Auch dieser ist an einer festen Stelle im Strahlerkopf positioniert, völlig unabhängig von irgendwelchen Feldgeometrien. Varian™ nennt dieses Vorgehen „truncation process“ [52], siehe Abb. 7.4. Eine golden STT $G(y)$ bezieht sich auf einen 60° -Keilwinkel. Die zugehörigen Tabellen sind in [52] angegeben, können aber außerdem sehr gut analytisch approximiert werden [54], und zwar in der Form:

$$G(y) \approx c_0 + c_1 \exp(c_2 \cdot y). \quad (7.9)$$

Wird dieser Ausdruck an die Zahlenwerte angefügt, findet man z.B. für 6MV und 15MV die Parameter:

	c_0	c_1	c_2
6MV	-0.0497845	1.1942083	0.0905305
15MV	-0.0818435	1.1968444	0.0705388

Wie schon angedeutet, beschreibt eine STT den konkreten funktionellen Zusammenhang von Blendenposition y und den bis dahin abgestrahlten MU:

$$\text{MU}(y) = \text{MU}_{\text{tot}} \cdot \text{STT}(y). \quad (7.10)$$

MU_{tot} bedeutet die Gesamtzahl der MU für das Keilfeld. Dementsprechend muss eine STT normiert sein; für die Endposition y_F der Blende muss gelten: $\text{STT}(y_F) = 1$. Dabei hängt y_F direkt von der

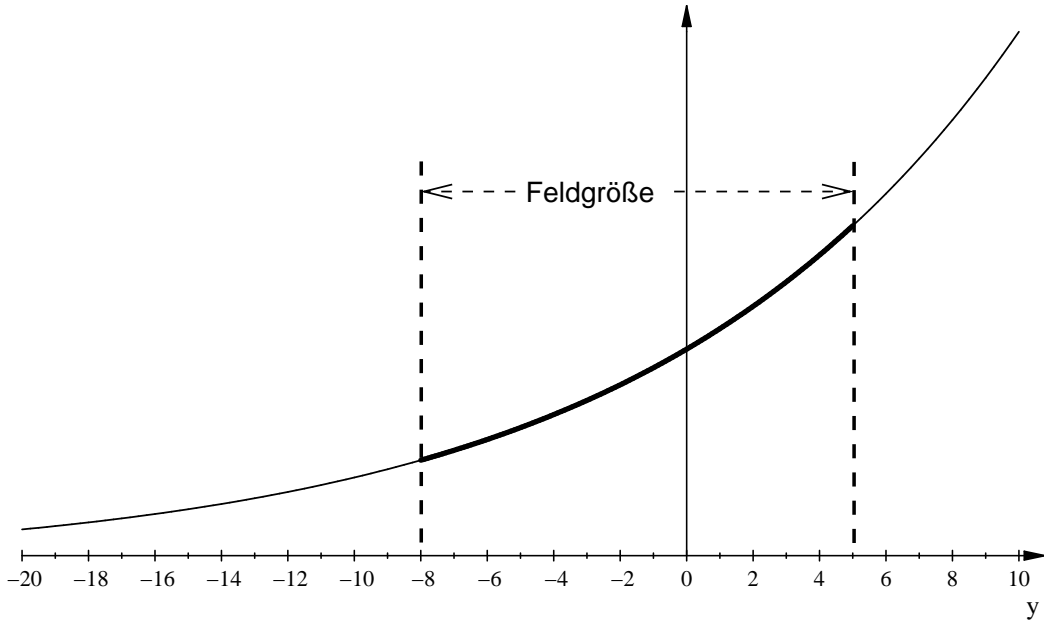


Abbildung 7.4: Prinzipielles Aussehen einer STT. Beim truncation process bestimmt der jeweilige Feldausschnitt, welche Werte der STT berücksichtigt werden.

Feldgröße ab. Für einen 60° -Keilwinkel kann als STT also direkt die golden STT verwendet werden, aber eben normiert auf die jeweilige Endposition y_F :

$$\text{STT}(\vartheta = 60^\circ, y) = \frac{G(y)}{G(y_F)}. \quad (7.11)$$

Für kleinere Keilwinkel wird ein offenes Feld beigemischt:

$$\text{MU}(\vartheta, y) \sim a_N(\vartheta) \cdot C + b_N(\vartheta) \cdot G(y); \quad (7.12)$$

die Koeffizienten a_N , b_N sind dabei die Ausdrücke aus Gl. (7.8). Die Konstante C wird festgelegt durch die Forderung, dass der Dosisverlauf längs des Zentralstrahls ($y = 0$) unabhängig vom Keilwinkel sein soll. Mit $C := G(y = 0)$ wird dies erfüllt, da dann $\text{MU}(\vartheta, 0) \sim (a_N + b_N)G(0) = G(0)$ gilt, siehe Abb. 7.5. Wie schon beim Ansatz (7.2) steckt dahinter wieder die Vorstellung, dass die Isodosen bei Variation des Keilwinkels lediglich ihren Winkel ändern, deren Schnittpunkte mit dem Zentralstrahl aber unverändert bleiben. Mit der notwendigen Normierung ergibt sich so der allgemeine Ausdruck:

$$\text{STT}(\vartheta, y) = \frac{a_N(\vartheta) \cdot G(0) + b_N(\vartheta) \cdot G(y)}{a_N(\vartheta) \cdot G(0) + b_N(\vartheta) \cdot G(y_F)}. \quad (7.13)$$

Dies ist genau der Ausdruck, der in [55] verwendet wird, dort aber ohne Herleitung vom Himmel fällt.

7.1.3 Keilfilterfaktoren

Keilfilterfaktoren werden spätestens bei der Berechnung einzelner Felder „von Hand“ relevant. Zur definitionsgemäßen Bestimmung des Keilfilterfaktors sind zwei Messungen erforderlich:

- Messung der Dosis D_W beim Keilfilterfeld im Zentralstrahl;

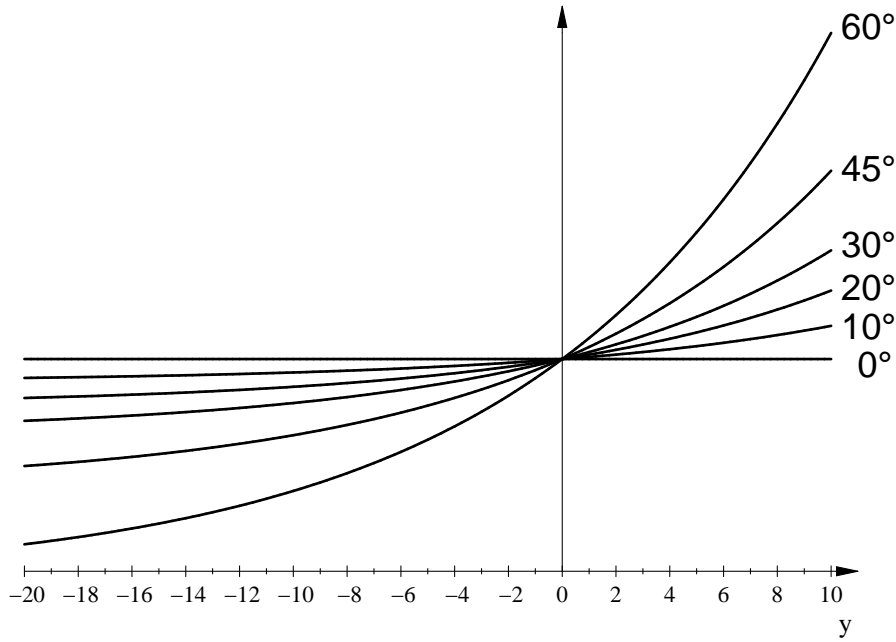


Abbildung 7.5: Verlauf von *unnormierten* STT für verschiedene Keilwinkel. Die Primärfluenz des Zentralstrahls bleibt davon unabhängig.

- Messung der Dosis D_o beim offenen Feld unter ansonsten identischen Bedingungen (gleiche Feldgröße, gleicher Messort, gleiche MU-Zahl, gleiche Energie).

Der Keilfilterfaktor k_{KF} ist dann definiert als:

$$k_{\text{KF}} := \frac{D_w}{D_o}. \quad (7.14)$$

Wenn es messtechnisch möglich oder sinnvoll ist, könnte man stattdessen jeweils gerade so viele MU abstrahlen, dass sich in beiden Fällen identische Messwerte ergeben; dann gilt:

$$k_{\text{KF}} = \frac{\text{MU}_o}{\text{MU}_w}; \quad (7.15)$$

genau in dieser Weise wird der Keilfilterfaktor in Handrechnungen verwendet.

Die Ermittlung dieses Faktors gestaltet sich für die beiden Keilkonzepte ausgesprochen unterschiedlich:

Beim physikalischen Keilfilter stellt obige Definition des Keilfilterfaktors direkt schon die Anleitung zu dessen Bestimmung dar. Maßgeblich ist also die Schwächung im Zentralstrahl durch die Filterplatte. Insbesondere ist der Faktor von der Feldgröße im Wesentlichen unabhängig.

Beim dynamischen Keilfilter ist die Bestimmung des Faktors alleine schon wegen dessen expliziter Abhängigkeit von der Feldgröße ungleich schwieriger. Hier soll dafür zumindest die sog. „fraktionelle MU-Näherung“ angegeben werden [54][55]. Diese Näherung beruht auf der Vorstellung, dass eine Messkammer im Zentralstrahl die volle Dosisleistung registriert, bevor sie von der dynamischen Blende abgeschattet wird, danach gar keine mehr. Die Fehler, die hier gemacht werden, heben sich teilweise auf: Bereits vor der Abschattung ist die Dosisleistung verringert, danach

aber immer noch größer als Null. Zur Berechnung des Keilfilterfaktors kann man dann analog zu Gl. (7.15) die MU in Relation setzen; mit Gln. (7.10)(7.13) folgt so:

$$k_{\text{KF}}(\vartheta, y_{\text{F}}) \approx \frac{\text{MU}(0)}{\text{MU}_{\text{tot}}} = \text{STT}(0) = \frac{1}{a_{\text{N}}(\vartheta) + b_{\text{N}}(\vartheta) \cdot \frac{G(y_{\text{F}})}{G(0)}} \quad (7.16)$$

Zur Bestimmung dieser Größe muss der genaue Wert der Blenden-Endposition y_{F} bekannt sein. Bei Varian[™] bewegt sich die dynamische Blende bis auf 0.5cm an die gegenseitige Blende; y_{F} liegt somit 0.5cm vor der gegenüberliegenden Feldgrenze.

7.2 Dynamische MLC-Bewegung

Unter „dynamischer MLC-Bewegung“ versteht man eine spezielle Art der Intensitätsmodulation der Primärfluenz: Während der Strahlzeit werden dabei die Leafs eines Multi-Leaf-Collimators (MLC) in einer solchen Weise bewegt, dass sich dadurch ein definiertes Intensitätsprofil ergibt. Beim Blick auf die dynamischen Keile bekommt man einen Eindruck von der Problematik bei der tatsächlichen Umsetzung. Mit einer Reihe von Vereinfachungen lassen sich aber zumindest grundlegende Überlegungen anstellen, die die wesentlichen Zusammenhänge zeigen.

Stellvertretend für einen MLC wird hier nur ein Paar gegenüberliegender Leafs betrachtet und die folgende *Modellvorstellung* verwendet (Abb. 7.6):

- die Strahlung wird als Parallelbündel betrachtet;
- Streuung wird vernachlässigt.

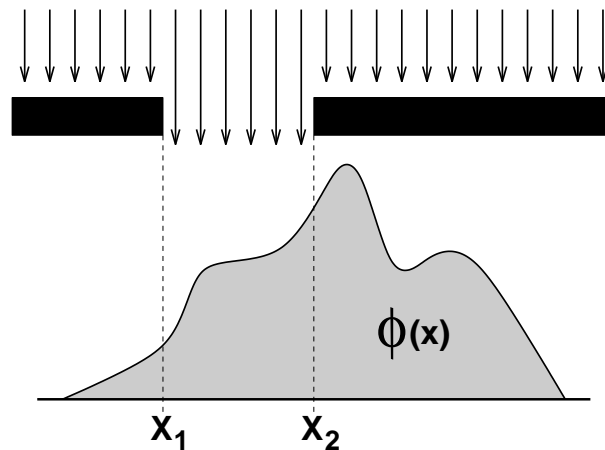


Abbildung 7.6: Vereinfachte Modellvorstellung: Parallelstrahlgeometrie ohne Streuung.

Unter diesen Bedingungen ergibt sich das Fluenzprofil $\phi(x)$ als:

$$\phi(x) = \int_{\tau} \left(\theta(x - x_1(t)) - \theta(x - x_2(t)) \right) dt. \quad (7.17)$$

Wird nun davon die Ableitung nach x gebildet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x) = \int_{\tau} \left(\delta(x - x_1(t)) - \delta(x - x_2(t)) \right) dt \quad (7.18)$$

und mit der Eigenschaft der Deltafunktion nach Gl. (1.51):

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x_n) \right|}, \quad (7.19)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) &= \int_{\tau} \left[\sum_n \frac{\delta(t - t_n)}{\left| \frac{\partial}{\partial t} (x - x_1(t)) \right|} - \sum_m \frac{\delta(t - t_m)}{\left| \frac{\partial}{\partial t} (x - x_2(t)) \right|} \right] dt \\ &= \sum_n \frac{1}{|v_1(t_n)|} - \sum_m \frac{1}{|v_2(t_m)|}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Hier wurde verwendet, dass zu den Zeiten t_n die Blendenposition x_1 am Ort x ist, d.h. es handelt sich um Nullstellen der Funktion $(x - x_1(t))$; Analoges gilt für x_2 .

Mit der (sinnvollen) Vorgabe, dass jede Blendenkante jeden Ort x *nur einmal* überstreichen soll, entfällt außerdem die Summation, und man erhält als vorläufiges Ergebnis die Grundgleichung:

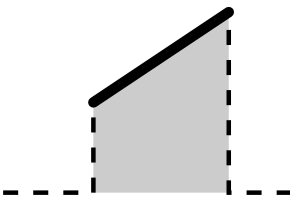
$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x) = \frac{1}{v_1(x)} - \frac{1}{v_2(x)}. \quad (7.21)$$

Es stellt sich nun das formale Problem, dass mit *einer* Bestimmungsgleichung *zwei* Funktionen gesucht sind. Deshalb bietet sich z.B. die Strategie an, den Effekt auf eine der Blenden zu verlagern:

- die schnellere Blende bewegt sich mit der (technischen) Maximalgeschwindigkeit;
- die langsamere Blende macht die Modulation.

Je nachdem, ob das Dosisprofil lokal ansteigend oder abfallend ist, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

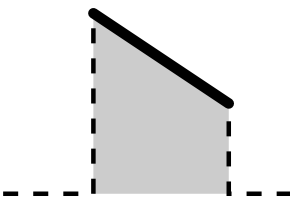
Profil ansteigend:



$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v_2(x) \geq v_1(x) \quad \Rightarrow \quad v_2 \stackrel{!}{=} v_{\max};$$

$$\text{Resultat:} \quad v_1(x) = \frac{1}{\frac{1}{v_{\max}} + \frac{\partial}{\partial x} \phi(x)};$$

Profil abfallend:



$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad v_2(x) \leq v_1(x) \quad \Rightarrow \quad v_1 \stackrel{!}{=} v_{\max};$$

$$\text{Resultat:} \quad v_2(x) = \frac{1}{\frac{1}{v_{\max}} - \frac{\partial}{\partial x} \phi(x)};$$

Diese Strategie geht in jedem Fall von den Anfangsbedingung aus, dass die Blenden geschlossen sind und sich die Blendenkanten auf einer Seite befinden, z.B.: $x_1 = x_2 = -1$.

Eine Differentialgleichung der Art

$$v(x) = \frac{1}{\frac{1}{v_{\max}} \pm \frac{\partial}{\partial x} \phi(x)}, \quad \text{d.h. DGL der Form:} \quad \dot{x} = f(x),$$

kann allgemein trivial gelöst werden:

$$\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1 = \frac{d}{dt} \int \frac{dx}{f(x(t))}, \quad \text{also Lösung} \quad \int \frac{dx}{f(x(t))} = t + C;$$

dies lautet im konkreten Fall:

$$\int \left[\frac{1}{v_{\max}} \pm \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) \right] dx = t + C;$$

damit ergibt sich die *implizite* Lösung:

$$\left[\frac{\tilde{x}}{v_{\max}} \pm \phi(\tilde{x}) \right]_a^x = t - t_a.$$

Kapitel 8

Anhang / Sonstiges

8.1 Gamma-Evaluation

8.1.1 Grundlegende Idee

Eine häufige Fragestellung ist die nach Gleichheit von zwei Funktionen, oder hier speziell, von zwei Dosisverläufen. Besitzen diese zwei Funktionen an allen Punkten die „gleichen“ Funktionswerte, dann ist die Frage natürlich erledigt. Typischerweise werden sich aber gewisse Abweichungen ergeben. Diese Abweichungen können auf „echte“ Unterschiede in den Funktionswerten hinweisen, sie können aber auch entstanden sein durch gegenseitige räumliche Verschiebung der Funktionsverläufe – vor allem wenn Messungen mit einbezogen sind. Denn dann einfach nur die Funktionswerte an jedem Punkt zu vergleichen, ist problematisch, da hier die Steilheit (der Gradient) der Funktionsverläufe eine wesentliche Rolle spielt (Abb. 8.1).

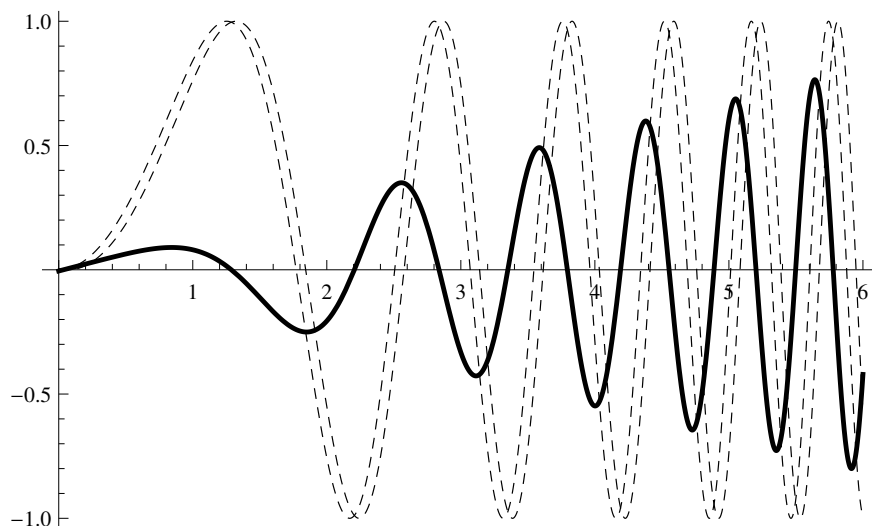


Abbildung 8.1: Differenz (durchgezogen) der Werte zweier Funktionen (gestrichelt), die sich nur durch eine kleine räumliche Verschiebung unterscheiden. Entscheidend für diese Differenz ist die Steilheit der Funktionen.

Ein naheliegender Ansatz besteht deshalb in der Betrachtung des euklidischen Abstands der Funk-

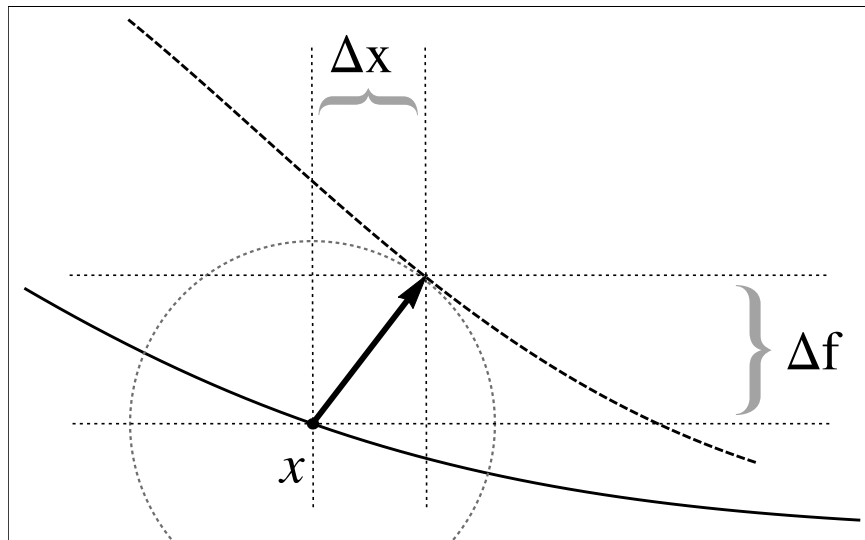


Abbildung 8.2: Euklidischer Abstand von einem Punkt der Referenzkurve (durchgezogen) zur anderen Kurve (gestrichelt).

tionsverläufe [56]: Man erklärt eine der Funktionen zur Referenz; der Gamma-Wert γ an einem Punkt x dieser Kurve ist dann der Abstand zum nächstgelegenen Punkt der anderen Kurve (Abb. 8.2). Um dies erst sinnvoll möglich zu machen, wird in einen dimensionslosen Raum übergegangen, d.h. man gibt Abweichungswerte α für den Ort und β für den Funktionswert vor und berechnet den Gamma-Wert als:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{\beta}\right)^2}. \quad (8.1)$$

Dabei haben α und β die entsprechenden Einheiten, so dass γ tatsächlich dimensionslos ist. Bei $\gamma = 1$ hat dieser Ausdruck die Form einer Ellipsengleichung mit α und β als Halbachsen. Anschaulich gesprochen zeichnet man also diese Ellipse um einen Punkt auf der Referenzkurve und prüft, ob die andere Kurve ein Stück weit innerhalb der Ellipse verläuft (dann $\gamma < 1$) oder nicht (dann $\gamma > 1$). Werden α und β als Toleranzen der Abweichung verstanden und entsprechend gewählt, dann ist eine sehr einfache Interpretation des Gamma-Wertes möglich:

$$\begin{aligned} \gamma < 1 & : \text{ Punkt innerhalb der Toleranz,} \\ \gamma > 1 & : \text{ Punkt außerhalb der Toleranz.} \end{aligned}$$

Typische Toleranzvorgaben bei Vergleich von Dosisverteilungen sind 3mm und 3%, wobei oft nicht klar wird, ob sich diese Prozentangabe auf den lokalen Wert (den Sollwert der Referenz an dieser Stelle) oder auf das globale Maximum bezieht.

Die Definition des Gamma-Wertes als „Abstand zum nächstgelegenen Punkt der anderen Kurve“ bewirkt, dass es nicht gleichgültig ist, welche der Kurven als Referenz gewählt wird, denn der Abstandsvektor steht stets senkrecht auf der anderen Kurve. Zu einem bestimmten Ortswert können sich also durchaus unterschiedliche Gamma-Werte ergeben (Abb. 8.3).

Für den Gamma-Wert läßt sich zumindest in Näherung ein analytischer Ausdruck finden: Von zwei zu vergleichenden Kurven f und h sei f die Referenzkurve. Wie oben beschrieben, steht dann der Gamma-Vektor stets senkrecht auf h . Dann läßt sich als exakte Gleichung direkt ansetzen (vgl. Abb. 8.4):

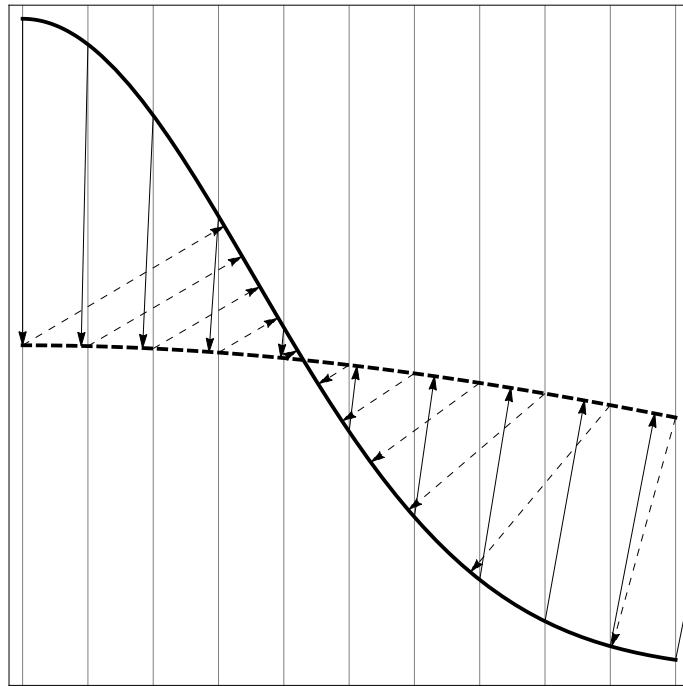


Abbildung 8.3: Je nach Wahl der Referenzkurve ergeben sich unterschiedliche Gamma-Werte (Länge der Pfeile).

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1 + (h'(q))^2}} \begin{pmatrix} -h'(q) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ h(q) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ f(p) \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Die Referenzfunktion wird nun um q entwickelt:

$$f(p) \approx f(q) + f'(q) \cdot (p - q) + \frac{1}{2} f''(q) \cdot (p - q)^2; \quad (8.3)$$

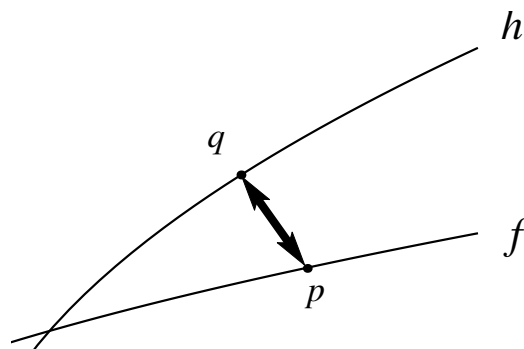


Abbildung 8.4: Referenzkurve f und Vergleichskurve h .

das Gleichungssystem in (8.2) wird so zu (mit $d := p - q$):

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1 + (h'(q))^2}} \cdot h'(q) = d;$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1 + (h'(q))^2}} \approx h(q) - f(q) - f'(q) \cdot d - \frac{1}{2} f''(q) \cdot d^2.$$

Damit folgt insgesamt als Näherung in

$$1. \text{ Ordnung: } \gamma \approx \left| \frac{\sqrt{1 + h'^2}(f - h)}{1 + h'f'} \right|; \quad (8.4)$$

$$2. \text{ Ordnung: } \gamma \approx \left| \frac{\sqrt{1 + h'^2}}{f''h'^2} \left[-(1 + h'f') + \sqrt{(1 + h'f')^2 + 2f''h'^2 \cdot (h - f)} \right] \right| \quad (8.5)$$

Der Betrag wird verwendet, da der Gamma-Wert in seiner Bedeutung als Abstand stets positiv ist. (Bei der Berechnung der 2. Ordnung ist eine quadratische Gleichung zu lösen, bei der die Entscheidung des Vorzeichens mit der Bedingung $f = h \xrightarrow{!} \gamma = 0$ getroffen werden kann.) Die Näherung besteht also in der obigen Entwicklung von f und eben darin, dass der Bezugspunkt q zur Vergleichskurve (und nicht zur Referenzkurve) gehört. Je nach Kurvensteigung ergibt sich so also eine kleine Ortsverschiebung der Gamma-Werte.

Die obigen Ausdrücke gelten natürlich nur für den bereits dimensionslos normierten Raum. Um die dimensionsbehafteten Größen (mit Index 'd') zu verwenden, ist zu ersetzen:

$$x_d = \alpha x; \quad f(x) = \frac{1}{\beta} f_d(\alpha x); \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{\alpha}{\beta} f'_d(x_d).$$

(Analog für h .) Insgesamt ergibt sich z.B. für Gl. (8.4):

$$\gamma \approx \left| \frac{\sqrt{\beta^2 + (\alpha h'_d(x_d))^2} (f_d(x_d) - h_d(x_d))}{\beta^2 + \alpha^2 h'_d(x_d) f'_d(x_d)} \right|. \quad (8.6)$$

Abb. 8.5 zeigt ein Beispiel von zwei sich leicht unterscheidenden Kurvenverläufen, Abb. 8.6 die gleichen Kurven, nur eben in den dimensionslosen Raum umskaliert. In Abb. 8.7 ist die zugehörige Auswertung dargestellt; der Gamma-Wert ist dann lediglich der euklidische Abstand zwischen den Kurven in Abb. 8.6. (Alle hier gemachten Prozentangaben beziehen sich auf das globale Maximum der Kurve.)

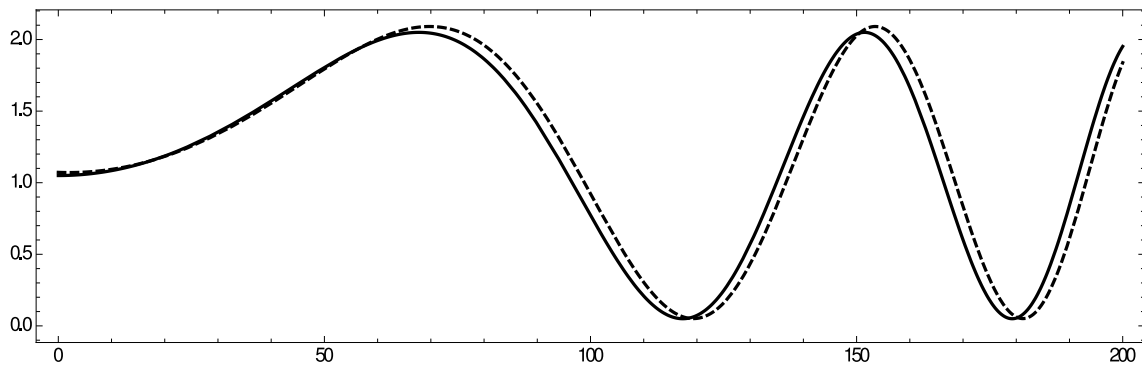


Abbildung 8.5: Beispielkurven; Referenzkurve durchgehend gezeichnet. Der hier eingestellte *gleichzeitige* Fehler liegt bei 2mm und 2%. (x-Achse in [mm].)

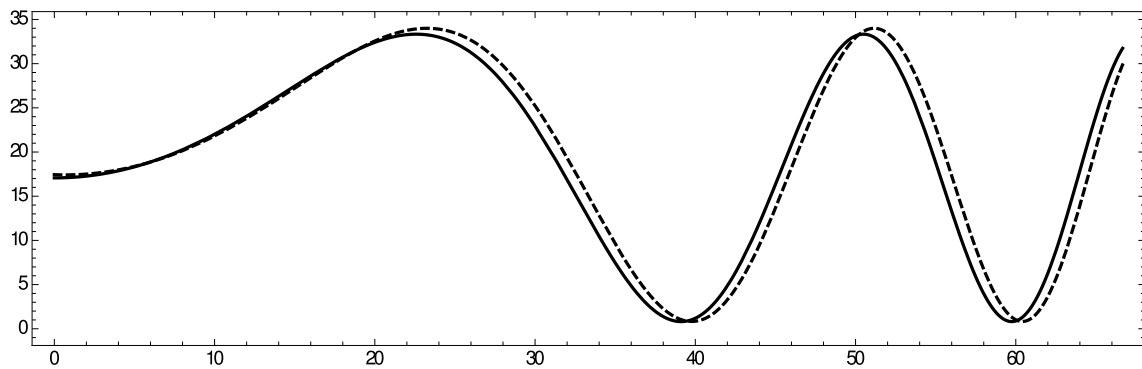


Abbildung 8.6: Die gleichen Beispielkurven, nur umskaliert in einen Raum mit den dimensionslosen Vielfachen (von 3mm und 3%) als neue Einheit.

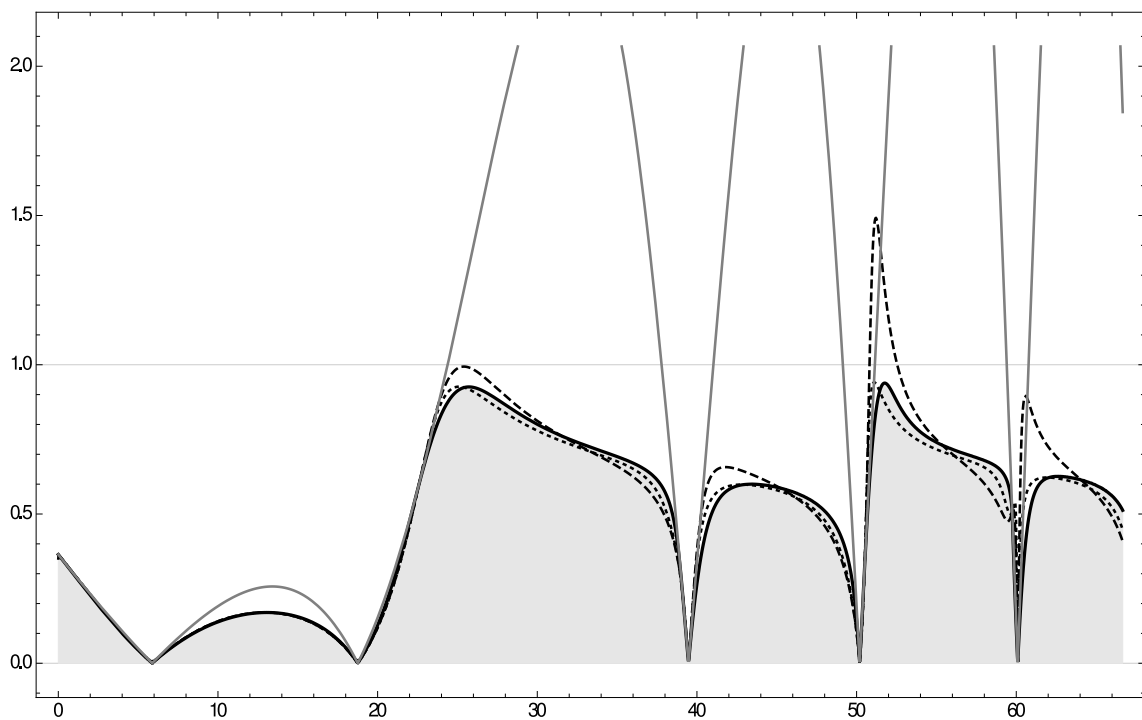


Abbildung 8.7: Auswertung der obigen Beispielkurven mit den Kriterien [3%,3mm]: Numerischer (genauer) Gamma-Wert (schwarz), Differenzbetrag (grau), Näherung 1. Ordnung (gestrichelt), Näherung 2. Ordnung (gepunktet).

8.1.2 Gamma-Fehler durch Messung

Wenn man die Kurven f und h konkret als tatsächliche und gemessene Dosisverteilung auffasst, dann ist interessant abzuschätzen, wie groß der Gamma-Wert alleine durch die Messung mit einer Messkammer endlicher Ausdehnung wird. Gefragt ist also nach dem Einfluß, der sich durch die entsprechende Faltung ergibt (vgl. Kap. 5).

Sei also wieder f die Referenz und $h = g * f$ die Messung, d.h. die Dosisverteilung gefaltet mit dem Kern der Messkammer. Selbstverständlich kommt es bei der Berechnung des Gamma-Wertes auf den konkreten Dosisverlauf an, aber um einen allgemeinen Eindruck davon zu erhalten, bietet sich an, jede Ortsfrequenz η einzeln zu betrachten und zu setzen: Fluenz = $(1 + \cos(2\pi\eta x))/2$. Natürlich kommen hier wieder die bekannten Kerne zum Einsatz: Der Lorentz-Kern l und der Gauss-Kern g (vgl. z.B. Gl. (5.11)(5.12)).

Für das zugehörige Dosisprofil kann dann gesetzt werden:

$$f = l * \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi\eta x)), \quad (8.7)$$

und für den Messwert:

$$h = g * f = g * l * \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi\eta x)). \quad (8.8)$$

(Verwendet wird hier die Assoziativität der Faltung, Gl. (1.29).) Hier mag man zunächst befürchten, dass die sich ergebenden Faltungsausdrücke kompliziert und unhandlich werden; durch die Beteiligung einer harmonischen Funktion tritt dies aber gerade nicht ein (vgl. Gl. (1.34)), da allgemein gilt (mit $p \circ \bullet P$ und Gl. (1.139)(1.140)):

$$\begin{aligned} p(x) * \cos(2\pi\eta x) & \circ \bullet P(\kappa) \cdot \frac{1}{2}(\delta(\kappa + \eta) + \delta(\kappa - \eta)) \bullet \circ \\ & \bullet \circ \int P(\kappa) \cdot \frac{1}{2}(\delta(\kappa + \eta) + \delta(\kappa - \eta)) e^{+2\pi i \kappa x} d\kappa = \\ & = \begin{cases} P(\eta) \cdot \cos(2\pi\eta x); & \text{bei } p \text{ bzw. } P \text{ gerade} \\ i P(\eta) \cdot \sin(2\pi\eta x); & \text{bei } p \text{ bzw. } P \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Also findet man (mit $l \circ \bullet L$ und $g \circ \bullet G$):

$$\begin{aligned} f & = l * \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi\eta x)) = \frac{1}{2}(1 + l * \cos(2\pi\eta x)) = \frac{1}{2}(1 + L(\eta) \cdot \cos(2\pi\eta x)), \\ f' & = -L(\eta) \cdot \sin(2\pi\eta x)\pi x, \\ h & = g * l * \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi\eta x)) = \frac{1}{2}(1 + G(\eta) \cdot L(\eta) \cdot \cos(2\pi\eta x)), \\ h' & = -G(\eta) \cdot L(\eta) \cdot \sin(2\pi\eta x)\pi x. \end{aligned}$$

Dies sind alle Zutaten, die in Gl. (8.4) benötigt werden. Da die Frage nach dem grundsätzlichen Einfluss einer Messung gestellt war, ist eigentlich der maximale Gamma-Wert interessant, und dieser tritt bei Faltung eines \cos mit symmetrischen Kernen stets an den Extrema auf. Da dort waagerechte Funktionsverläufe sind, reduziert sich der Gamma-Wert schlicht auf den Differenzbetrag. Es genügt also – stellvertretend für alle Extrema – den Wert $\gamma(x = 0)$ zu berechnen; Gl. (8.6) vereinfacht sich dann zu

$$\gamma(0) = \frac{1}{\beta} |h - f|;$$

unter dieser Bedingung ist der Gamma-Wert sogar exakt. Das Ergebnis lautet also:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\beta} \left| L(\eta)(1 - G(\eta)) \right| = \frac{1}{\beta} e^{-2\pi\lambda|\eta|} \left(1 - e^{-2\pi^2\eta^2\sigma^2} \right). \quad (8.9)$$

In Abb. 8.8 ist die zugehörige Kurve gezeigt. Bei sehr hohen und sehr niedrigen Ortsfrequenzen in der Fluenzmodulation ist der Gamma-Wert klein: Klein bei den niedrigen Frequenzen, da es sich um eine „quasikonstante“ Funktion handelt – und klein bei den hohen Frequenzen, weil der Lorentz-Kern alle Modulationen geglättet hat, bevor der Gauss-Kern überhaupt zum Tragen kommt.

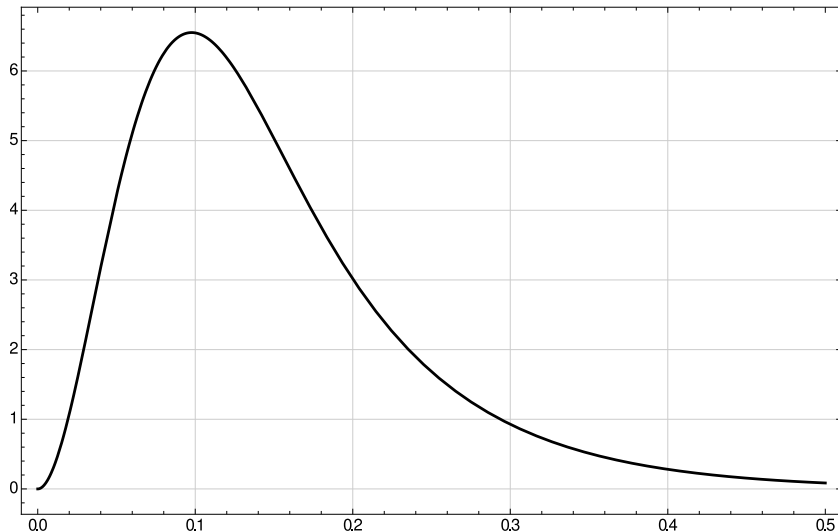


Abbildung 8.8: Der maximale Gamma-Wert nach Gl. (8.9) in Abhängigkeit von der Ortsfrequenz η mit den Parametern $\lambda = 1.9$, $\sigma = 2.3$, $\beta = 3\%$.

Damit soll – wie gesagt – nur ein Eindruck vom Einfluss der Messung auf den Gamma-Wert gewonnen werden. Leider ist ansonsten obige Rechnung nicht verallgemeinerbar, und das liegt an der Nichtlinearität des Gamma-Ausdrucks; es gilt eben (schematisch formuliert):

$$\sum_n a_n \gamma(\cos(2\pi\eta_n x)) \neq \gamma\left(\sum_n a_n \cos(2\pi\eta_n x)\right).$$

Im allgemeinen Fall sind die (Mehrfach-)Faltungen wohl tatsächlich auszuführen. Hilfreich kann dann die Verwendung der PseudoVoigt-Funktion (Kap. 1.2.8) sein.

8.2 Generalized Equivalent Uniform Dose

Bei bestimmten Fragestellungen will man aus der Dosisverteilung innerhalb ausgewählter Volumina einen einzigen Dosiswert extrahieren, der dann – stellvertretend für die Verteilung – als relevanter Wert genommen werden kann. Typischerweise wird dazu die „generalized equivalent uniform dose“ (gEUD) verwendet:

$$\text{gEUD}(a) := \left(\sum_n p_n \cdot (D_n)^a \right)^{1/a}, \quad (8.10)$$

dabei bezeichnen D_n die mit der (normierten) Wahrscheinlichkeit p_n vorkommenden Dosiswerte. Der Parameter a entscheidet, welcher Teil der Dosisverteilung für das Ergebnis relevant wird. Obwohl dieser Ausdruck einfach gebaut ist, besitzt er doch interessante mathematische Eigenschaften, die auch seine Verwendung dafür begründen:

1. $\lim_{a \rightarrow -\infty} \text{gEUD}(a) = D_{\min}$
2. $\lim_{a \rightarrow +\infty} \text{gEUD}(a) = D_{\max}$
3. $\text{gEUD}(-1) = \text{harmonisches Mittel}$
4. $\lim_{a \rightarrow 0} \text{gEUD}(a) = \text{geometrisches Mittel}$
5. $\text{gEUD}(+1) = \text{arithmetisches Mittel}$

Natürlich dürfen die Beweise dafür nicht fehlen:

Eigenschaft 1 und 2: Sei $D_m = D_{\max}$ der größte vorkommenden Dosiswert, dann:

$$\text{gEUD}(a) = \left(p_m (D_m)^a + \sum_{n \setminus m} p_n (D_n)^a \right)^{1/a} = D_m \cdot \left(p_m + \sum_{n \setminus m} p_n \left(\frac{D_n}{D_m} \right)^a \right)^{1/a};$$

der Quotient $\left(\frac{D_n}{D_m} \right)$ ist stets kleiner 1; damit folgt sofort:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \text{gEUD}(a) \rightarrow D_m \cdot (p_m)^{1/a} \rightarrow D_m;$$

der Fall für $a \rightarrow -\infty$ und D_{\min} funktioniert analog.

Eigenschaft 3 und 5: Einfaches Einsetzen:

$$\text{gEUD}(+1) = \sum_n p_n D_n; \quad \text{gEUD}(-1) = \frac{1}{\sum_n p_n \frac{1}{D_n}};$$

Eigenschaft 4: Man betrachtet: $\ln(\text{gEUD}(a)) = \frac{\ln(\sum_n p_n (D_n)^a)}{a}$; für $a \rightarrow 0$ hat man dafür die Situation „ $\frac{0}{0}$ “ und kann folglich den Satz von L'Hospital anwenden:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \ln(\text{gEUD}(a)) \rightarrow \frac{\sum_n p_n (D_n)^a \ln(D_n)}{\sum_n p_n (D_n)^a} \rightarrow \sum_n p_n \ln(D_n) = \ln \left(\prod_n (D_n)^{p_n} \right);$$

also: $\lim_{a \rightarrow 0} \text{gEUD}(a) = \prod_n (D_n)^{p_n}$

8.3 Treffertheorie und Dosiseffektkurve

Die Prozedur „Tumorbestrahlung“ kann rein statistisch betrachtet werden (z.B. [57]): Eine einzelne Zelle wird dabei mit Quanten beschossen; dabei gilt

- eine hohe Anzahl s von „Schüssen“,
- eine geringe Schadenswahrscheinlichkeit p pro Schuß (Kombination der Wahrscheinlichkeiten von Treffer und Schädigung bei Treffer).

In einer solchen Situation ist die Poissonverteilung (siehe Kap. 1.5.4) anzuwenden; die Wahrscheinlichkeit von n Treffern der Zelle lautet:

$$P_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad \text{mit } \lambda := s \cdot p. \quad (8.11)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Überleben ($n = 0$ Treffer) der Zelle ist dann $P_0 = e^{-sp}$.

Nun bezieht man sich auf einen Tumor mit N_T Zellen; sei hier

- die Überlebenswahrscheinlichkeit P_0 für jede einzelne Zelle klein (!),
- die Prozedur wird viele Male angewendet – eben auf N_T Zellen.

Dies ist wieder ein Fall für die Poissonverteilung:

$$\mathcal{P}_k = \frac{\zeta^k e^{-\zeta}}{k!}, \quad \text{mit } \zeta := N_T \cdot P_0. \quad (8.12)$$

Dieser Ausdruck beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass der Tumor noch k überlebende Zellen hat. „Heilung“ bedeutet, dass keine Tumorzellen überleben ($k = 0$). Die Tumorkontrollwahrscheinlichkeit (d.h. Heilungswahrscheinlichkeit) ergibt sich damit zu:

$$\mathcal{P}_0 = e^{-\zeta} = e^{-N_T \cdot P_0} = e^{-N_T \cdot e^{-sp}} \quad (8.13)$$

Im Rahmen dieses einfachen Modells kann man annehmen, dass s im Wesentlichen die verwendete Dosis beschreibt. Wenn man dies so aufträgt, dann ergibt sich die bekannte Form der Abhängigkeit der Heilungswahrscheinlichkeit von der Dosis nach Abb. 8.9.

Für gesundes Normalgewebe gilt leider ein analoger Zusammenhang, allerdings mit dem Unterschied einer leicht erhöhten Strahlungsresistenz (der Parameter p ist kleiner). Die zugehörige Kurve der Normalgewebsschädigung, bzw. der Nebenwirkungswahrscheinlichkeit ist also etwas nach rechts in den Bereich höherer Dosis verschoben. Für die Gesamtbewertung einer Strahlenbehandlung sind diese beiden Zusammenhänge in Relation zu setzen, so ergibt sich die Darstellung (Holthusen, 1936), die für die Strahlentherapie fundamental ist (Abb. 8.10). Der gegenseitige Abstand der Wahrscheinlichkeiten wird als *Therapeutische Breite* bezeichnet und lässt sich in gewissem Umfang vergrößern, z.B. durch spezielle Fraktionierungsschemata.

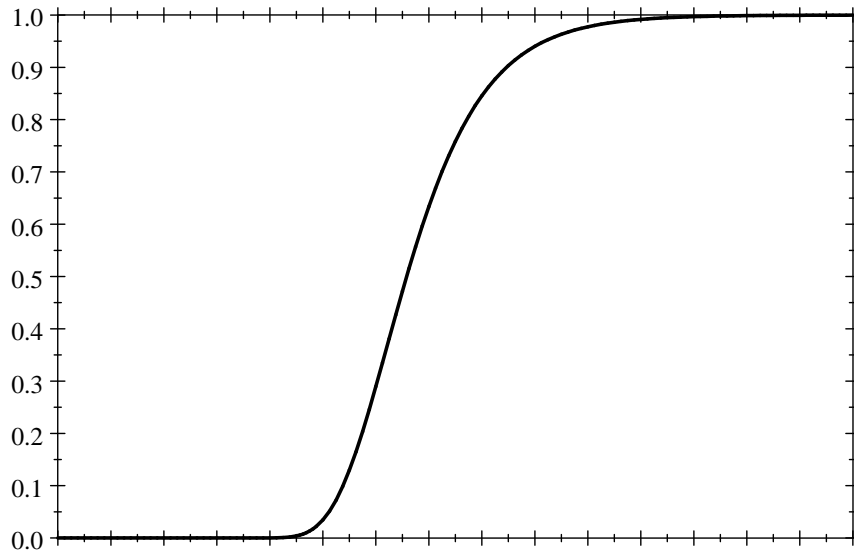


Abbildung 8.9: Dosiseffektkurve: Tumorkontrolle in Abhängigkeit von der Dosis.

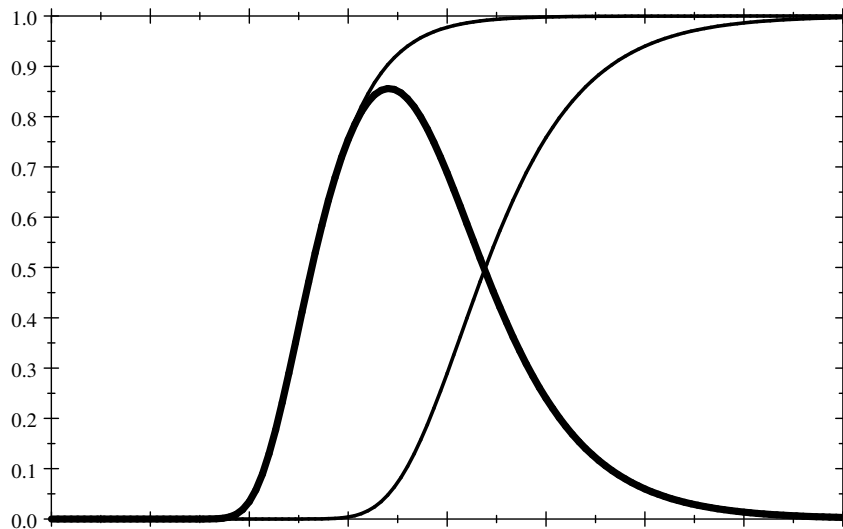


Abbildung 8.10: Therapeutische Bewertung: Tumorkontrollwahrscheinlichkeit abzüglich Nebenwirkungswahrscheinlichkeit.

8.4 Linear-Quadratisches Modell

Um zu den grundlegenden Gesetzmäßigkeiten zu kommen, stelle man sich nun modellhaft „Zellen“ (im Wortsinn) als gleiche Flächeneinheiten vor, die ohne Zwischenraum aneinandergereiht sind, z.B. schlicht: $\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square$ Wird ein solcher Verbund aus N Zellen mit einem einzigen Teilchen beschossen, dann ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Zelle getroffen zu werden $p = 1/N$, bzw. nicht getroffen zu werden $q = 1 - 1/N$. Die Wahrscheinlichkeit, nach $s = z \cdot N$ Schüssen nicht getroffen worden zu sein, beträgt somit:

$$\lim_{N \gg 1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{zN} \approx e^{-z} = e^{-s/N}.$$

Szenario 1: Führt bereits ein einziger Treffer zu einem *letalen* Schaden, dann sinkt der Anteil der

überlebenden Zellen („survival fraction“) wie $SF_1 := e^{-s/N}$;

Szenario 2: Ein einziger Treffer führt hier nur zu einem *subletalen* Schaden, für ein letales Ergebnis sind mindestens *zwei* Treffer notwendig. Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer nach $s = zN$ Schüssen ist:

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{s-1} \cdot \frac{1}{N} \cdot s = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{zN-1} \cdot \frac{zN}{N} \approx z \cdot e^{-z}.$$

Daraus folgt für die Überlebenswahrscheinlichkeit, d.h. für die Wahrscheinlichkeit für weniger als zwei (also 0 oder 1) Treffer:

$$SF_2 := e^{-z} + ze^{-z} = (1+z)e^{-z}.$$

Sinnvollerweise werden die Überlebensraten logarithmisch dargestellt (Abb. 8.11), oder man verwendet gleich den Logarithmus davon:

$$\text{ISF}_1 := \ln(SF_1) = -z;$$

$$\text{ISF}_2 := \ln(SF_2) = -z + \ln(1+z) = -\frac{z^2}{2} + O(z^3);$$

Natürlich ist die Größe z proportional zu dem, was man unter „Dosis“ versteht.

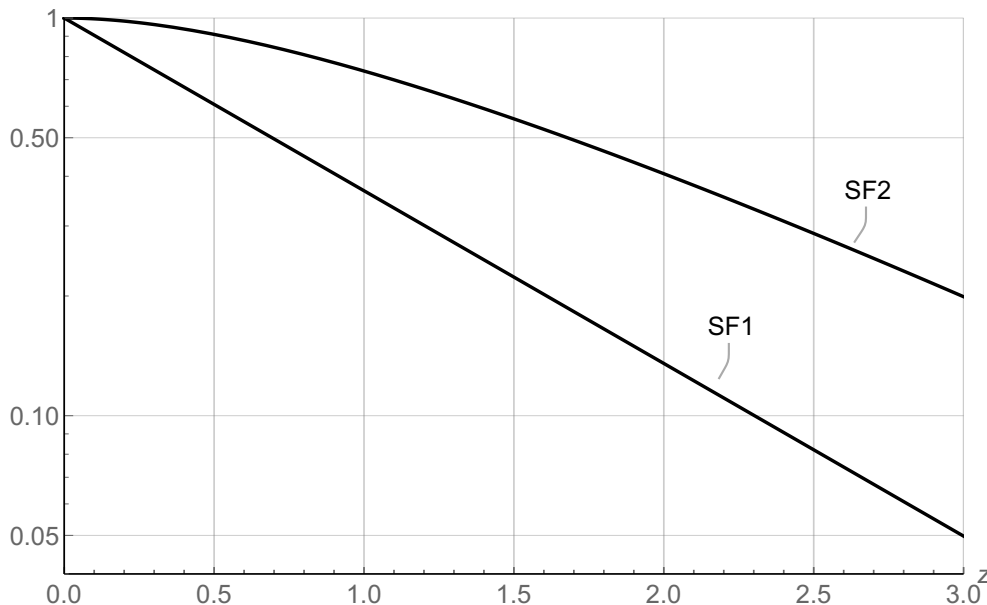


Abbildung 8.11: Überlebenswahrscheinlichkeiten gemäß der betrachteten Szenarien.

In der Praxis kommen die obigen Szenarien als Mischform vor und deshalb ist der Ansatz eine **LQ-Modells** („linear-quadratisch“) naheliegend (z.B. [57][25],etc.):

$$\text{ISF} = -\alpha D - \beta D^2; \quad (D : \text{Dosis}) \quad (8.14)$$

Damit können experimentell bestimmte Überlebenskurven offenbar hinreichend gut angefitet werden; die Parameter α und β sind gewebespezifisch, für den Gültigkeitsbereich des Modells wird das Dosisintervall [1,5Gy – 8Gy] angegeben. Neben dem LQ-Modell gibt es zahlreiche weitere Modelle solcher Art,

das LQ-Modell ist aber sicherlich das einfachste und gebräuchlichste. Es wird insbesondere genutzt, um Fraktionierungseffekte zu beschreiben: Unter *Fraktionierung* versteht man die Aufteilung einer Gesamtdosis in einzelne (gleich große) Verabreichungen („Fraktionen“) mit einer definierten Wartezeit dazwischen. Die Modellvorstellung ist hier, dass innerhalb einer solchen Wartezeit die überlebenden Zellen (d.h. diejenigen mit keinem oder nur subletalem Schaden) sich vollständig regenerieren, ganz so, als wären sie nie bestrahlt worden. Außerdem soll kein weiteres Zellwachstum stattfinden. Bei der darauffolgenden Fraktion erhält man folglich den identischen Verlauf des Abschnitts der Überlebenskurve – nur eben ausgehend von einem niedrigerem Niveau (Abb. 8.12, durchgezogene Kurve). Bei n Fraktionen

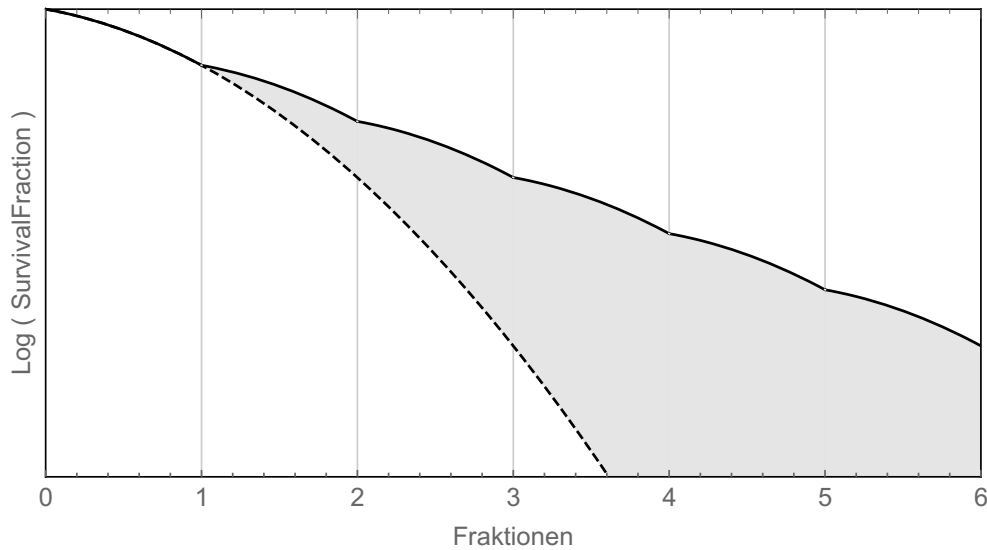


Abbildung 8.12: Unterschied der Überlebenswahrscheinlichkeiten bei fraktionierter und nicht-fraktionierter (gestrichelt) Bestrahlung.

mit der Einzeldosis d reihen sich diese Kurvenstücke aneinander und man erhält schlicht:

$$\text{ISF} = -\alpha n d - \beta n d^2. \quad (8.15)$$

Da die Kurven stets rechtsgekrümmt sind, führt Fraktionierung insgesamt zu einem flacheren Verlauf, d.h. zu mehr Zellüberleben bei gleicher Gesamtdosis $n \cdot d$. Ohne Fraktionierung gilt für diese Dosis:

$$\text{ISF} = -\alpha (n d) - \beta (n d)^2,$$

der Fraktionierungseffekt (die Differenz)

$$\alpha n d + \beta (n d)^2 - \alpha n d - \beta n d^2 = \beta d^2 (n^2 - n)$$

hängt also nicht von α ab.

Eine wichtig Anwendung des LQ-Modells ist die Umrechnung in verschiedene Fraktionierungsschemata bei jeweils gleichem biologischen Effekt, d.h. gleichem Wert von ISF, also:

$$\begin{aligned} \alpha n_1 d_1 + \beta n_1 d_1^2 &\stackrel{!}{=} \alpha n_2 d_2 + \beta n_2 d_2^2 \\ \Rightarrow n_1 d_1 \left(1 + \frac{d_1}{(\alpha/\beta)}\right) &= n_2 d_2 \left(1 + \frac{d_2}{(\alpha/\beta)}\right) =: \text{BED} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Ausdrücke dieser Form werden als BED („biologically effective dose“) bezeichnet, und Fraktionierungsschemata gelten als isoeffektiv, wenn sie zum gleichen BED führen. Interessant am BED ist, dass er tatsächlich die Einheit einer Dosis [Gy] trägt und nur vom Verhältnis (α/β) abhängt. Offenbar deshalb finden sich in der Literatur hauptsächlich nur die numerischen Werte dieses Quotienten. Da der Ausdruck $\alpha D + \beta D^2$ dimensionslos sein muss, hat (α/β) ebenfalls die Einheit einer Dosis [Gy], und zwar handelt es sich um genau denjenigen Dosiswert, bei dem der lineare und der quadratische Term zu gleichen Teilen am Effekt beteiligt sind, denn mit $D = \alpha/\beta$ folgt (vgl. Gl. (8.14)):

$$\text{ISF} = -\alpha \frac{\alpha}{\beta} - \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = -\frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Interessant ist der Vergleich bzgl. Geweben mit unterschiedlichen (α/β) -Werten; dazu wird Gl. (8.16) geschrieben als:

$$\frac{n_2 d_2}{n_1 d_1} = \frac{(\alpha/\beta) + d_1}{(\alpha/\beta) + d_2}, \quad (8.17)$$

hiervon betrachtet man nun die Grenzfälle (unter Isoeffektivität!):

$$\begin{aligned} (\alpha/\beta) \gg d_{1,2} &\implies n_2 d_2 \approx n_1 d_1 \\ (\alpha/\beta) \ll d_{1,2} &\implies n_2 d_2^2 \approx n_1 d_1^2 \end{aligned}$$

Geht man also aus von einem festen Bestrahlungsplan mit n Fraktionen und festen Fraktionsdosen für Hoch- und für Niedrig- (α/β) -Bereiche und vergleicht dies mit der Situation von verdoppelter Fraktionszahl bei halbiertes Fraktionsdosis, dann resultiert daraus Isoeffektivität für Gewebe mit sehr hohem (α/β) -Wert und halbierte Effektivität für Gewebe mit sehr niedrigem (α/β) -Wert (natürlich nur im Rahmen dieser Grenzfälle!). Festzuhalten ist aber in jedem Fall, dass die *Fraktionsdosis ein zunehmend überproportionales Gewicht bekommt, je kleiner der (α/β) -Wert ist.* Außerdem gelten die folgenden empirischen Beobachtungen:

- Variationen im Wert von (α/β) resultieren offenbar primär aus Variationen des Wertes von α ;
- große (α/β) -Werte ($\sim 10\text{Gy}$) werden korreliert mit „frühreagierendem“ und kleine (α/β) -Werte ($\sim 1 - 3\text{Gy}$) mit „spätreakierendem“ Gewebe;
- als grobe Daumenregel gilt: Normalgewebe/Risikoorgane gelten als spätreakierend, Tumorgewebe als frühreagierend; von einer Verkleinerung der Fraktionsdosis profitiert dann Normalgewebe. Umgekehrt sinken bei Hypofraktionierung (n kleiner, aber d grösser) die Grenzwerte für Risikoorgane.
- von dieser Regel gibt es offenbar relevante Ausnahmen, z.B. bei Prostata-CA wird angenommen(!): $((\alpha/\beta) \approx 1.5\text{Gy})$ mit Rektum als zugehörigem Risikoorgan $((\alpha/\beta) \gg 1.5\text{Gy})$; hier würde sich die Situation quasi umkehren [57].

8.5 Diagnostische Tests und Vorhersagewerte

Zu diagnostischen Test (z.B. [58]) gibt es typischerweise zwei wichtige Gütekriterien:

Sensitivität ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei tatsächlich vorliegender Krankheit („ K “) der Test positiv ausfällt („ T^+ “), also die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(T^+|K)$;

Spezifität bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass bei tatsächlich *nicht* vorliegender Krankheit („ \bar{K} “) der Test negativ ausfällt („ T^- “), also die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(T^-|\bar{K})$;

Sensitivität und Spezifität beschreiben also jeweils die Wahrscheinlichkeit für das korrekte Testergebnis bei *bekanntem* Sachverhalt („krank“ oder „nicht krank“).¹

In der Praxis stellt sich aber die Situation genau invers dar: Nach Anwenden des Tests ist das Testergebnis bekannt, und es interessiert die Wahrscheinlichkeit, dass der angezeigte Sachverhalt korrekt ist, also:

- Test positiv! Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(K|T^+)$?
- Test negativ! Wie groß ist $P(\bar{K}|T^-)$?

Die Umkehrung von bedingten Wahrscheinlichkeiten wird durch das Bayes–Theorem ermöglicht. Seien A und B zwei „Ereignisse“, dann gilt allgemein:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (8.18)$$

Der Zähler kann aber ebensogut geschrieben werden als:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A); \quad (8.19)$$

der Nenner lässt sich umschreiben als:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}). \quad (8.20)$$

Das Bayes–Theorem lautet damit:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}. \quad (8.21)$$

Im Fall der diagnostischen Tests folgt dann daraus:

$$P(K|T^+) = \frac{P(K) \cdot P(T^+|K)}{P(K) \cdot P(T^+|K) + P(\bar{K}) \cdot P(T^+|\bar{K})}; \quad (8.22)$$

$$P(\bar{K}|T^-) = \frac{P(\bar{K}) \cdot P(T^-|\bar{K})}{P(\bar{K}) \cdot P(T^-|\bar{K}) + P(K) \cdot P(T^-|K)}. \quad (8.23)$$

Eine relevante Größe ist hier die Wahrscheinlichkeit $P(K)$ für das generelle Vorkommen/Auffinden der Krankheit, die sog. *Prävalenz*. Typischerweise hat die Prävalenz einen niedrigen Wert (wenn es sich nicht um einen Hotspot bzgl. der betreffenden Krankheit handelt). Dann aber liefert das Bayes–Theorem interessante Ergebnisse, die nicht intuitiv sind. Ein Zahlenbeispiel:

¹Banal, aber dennoch wesentlich, ist die Tatsache, dass für einen guten Test *beide* Gütekriterien hohe Werte aufweisen müssen.

Test mit den Gütekriterien (Corona-Schnelltest von RocheDiagnostics™[59]):

Sensitivität: $P(T^+|K) = 0.955$; $\Rightarrow P(T^-|K) = 1 - P(T^+|K) = 0.045$;

Spezifität: $P(T^-|\bar{K}) = 0.992$; $\Rightarrow P(T^+|\bar{K}) = 1 - P(T^-|\bar{K}) = 0.008$;

Angenommene Prävalenz: $P(K) = 50/100000 = 1/2000 = 0.0005$; $\Rightarrow P(\bar{K}) = 0.9995$;

Dann ergibt sich: $P(K|T^+) \approx 0.056 \approx 6\%$;

$P(\bar{K}|T^-) \approx 0.999977 \approx 100\%$;

Fällt also ein solcher Test – ein Test mit einer eher hohen Güte! – positiv aus, dann ist nur mit knapp 6% davon auszugehen, dass die Krankheit tatsächlich vorliegt. Bei einem negativen Testergebnis ist dagegen mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit keine Krankheit vorhanden. Bei kleineren Werten der Prävalenz ist diese Tendenz der Ergebnisse noch weit ausgeprägter! Ein positives Testergebnis macht in diesem Sinne also lediglich die Aussage, dass keine Entwarnung gegeben werden kann und weitere Untersuchungen notwendig sind.

Die Prävalenz ist dabei also die eigentlich entscheidende Größe. Testergebnisse an Menschen mit Symptomen und in einem Risikogebiet sind deshalb durchaus unterschiedlich zu bewerten zu Testergebnissen an Menschen ohne Symptomen in einem Nicht-Risikogebiet. Abb. 8.13 zeigt diese Abhängigkeit von der Prävalenz (bei den o.g. Gütekriterien).

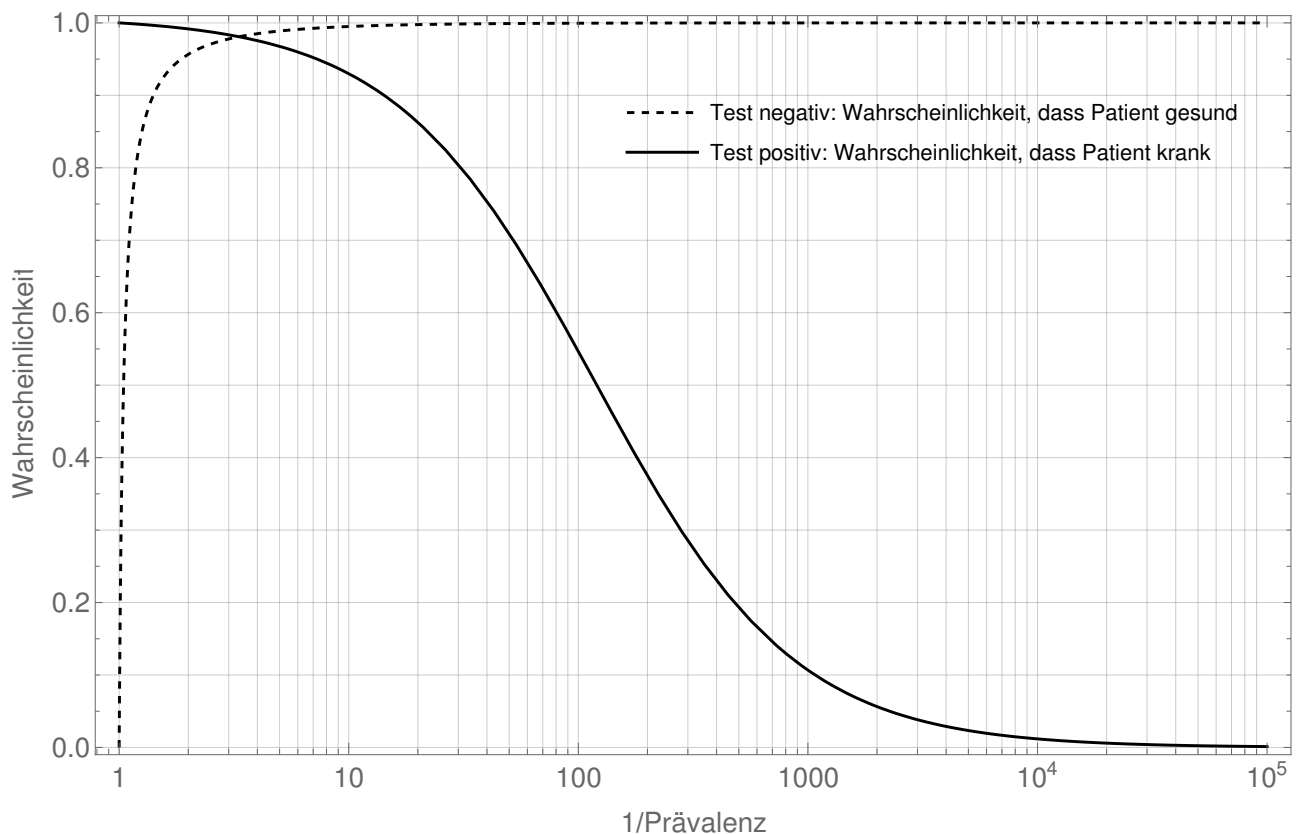


Abbildung 8.13: Vorhersagewerte in Abhängigkeit von der Prävalenz.

Literaturverzeichnis

- [1] H. MORNEBURG. *Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik*. Publicis MCD, München, 1995.
- [2] A. C. KAK und M. SLANEY. *Prinziples of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, New York, 1. Auflage, 1987.
- [3] H. STÖCKER. *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 2. Auflage, 1993.
- [4] M. ABRAMOWITZ und I. A. STEGUN (EDS.). *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, Washington, 10. Auflage, 1972.
- [5] L. RÅDE und B. WESTERGREN. *Springers Mathematische Formeln*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 2000.
- [6] D. E. KNUTH. *The art of Computer Programming I*. Addison–Wesley, Massachusetts Reading, 3. Auflage, 1997.
- [7] DEUTSCHE BUNDESBANK. 10 Deutsche Mark, 1991. Vergriffen.
- [8] I. N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 2. Auflage, 1995.
- [9] R. N. BRACEWELL. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw–Hill, New York, 3. Auflage, 2000.
- [10] WOLFRAM RESEARCH INC. Mathematica, 2014. Version Number: 10.0.
- [11] K. JÄNICH. *Analysis für Physiker und Ingenieure*. Springer–Verlag, Berlin, 1. Auflage, 1983.
- [12] B. P. COWAN. *Nuclear magnetic resonance and relaxation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Auflage, 1997.
- [13] K. F. RILEY, M. P. HOBSON und S. J. BENICE. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, Cambridge, 3. Auflage, 2006.
- [14] M. A. PINSKY. *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*. Brooks/Cole, Pacific Grove, 1. Auflage, 2002.

- [15] CH. W. WONG. *Introduction to Mathematical Physics*. Oxford University Press, New York, 1. Auflage, 1991.
- [16] E. KREYSZIG. *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 7. Auflage, 1998.
- [17] ERIC W. WEISSTEIN. "Double Factorial", From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/DoubleFactorial.html>.
- [18] E.V. HIRSCHHAUSEN. *Glück kommt selten allein . . .*. Rowohlt, Hamburg, 4. Auflage, 2009.
- [19] J. W. COLTMAN. *J. of the optical Soc. America* **44**, 468–71 (1954).
- [20] C. E SHANNON. *Proceedings of the IRE* **37**, 10–21 (1949).
- [21] W. ULMER und W. KAISSEL. *Phys. Med. Biol.* **48**, 707–27 (2003).
- [22] P. H. VAN CITTERT. *Z. Phys.* **69**, 298–308 (1931).
- [23] W. RULAND. *J. Appl. Cryst.* **4**, 328–9 (1971).
- [24] F. M. KHAN. *The Physics Of Radiation Therapy*. Lippincott Williams & Williams, Philadelphia, 3. Auflage, 2003.
- [25] P. MAYLES, A. E. NAHUM und J. C. ROSENWALD (Hrsg.). *Handbook of Radiotherapy Physics*. Taylor & Francis Group, Boca Raton, 1. Auflage, 2007.
- [26] E. B. PODGORSAK (Hrsg.). *Radiation Oncology Physics*. International Atomic Energy Agency, Vienna, 1. Auflage, 2005.
- [27] F. H. ATTIX. *Introduction to Radiological Physics and Radiation Dosimetry*. Wiley–VCH, Weinheim, 2. Auflage, 2004.
- [28] H. KRIEGER. *Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlenschutzes*. Teubner, Stuttgart, 1. Auflage, 2004.
- [29] ICRU Report 37, 1984. Stopping Powers for Electrons and Positrons.
- [30] ICRU Report 85a, 2011. Fundamental Quantities and Units for Ionizing Radiation (Revised).
- [31] P. ANDREO, D. T. BURNS, A. E. NAHUM, J. SEUNTJENS und F. H. ATTIX. *Fundamentals of Ionizing Radiation Dosimetry*. Wiley–VCH, Weinheim, 1. Auflage, 2017.
- [32] WOLFRAM RESEARCH INC. Mathematica, 2018. Version Number: 11.3.
- [33] K. ZINK. Einführung in die Strahlentherapie und Therapie mit offenen Nukliden. Studienskript MT002B, 2004.
- [34] E. B. PODGORSAK. *Radiation Physics for Medical Physicists*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 2010.
- [35] A. B. CHILTON. *JHealth Phys.* **34**, 715–6 (1978).

- [36] DIN 6800-2:2008-03 – Dosismessverfahren nach der Sondenmethode für Photonen- und Elektronenstrahlung – Teil 2: Dosimetrie hochenergetischer Photonen- und Elektronenstrahlung mit Ionisationskammern, 2008.
- [37] J. RICHTER und M. FLENTJE. *Strahlenphysik für die Radioonkologie*. Thieme, Stuttgart, 1. Auflage, 1998.
- [38] J. E. BURNS. *BJR Suppl.* **25**, 153–7 (1996).
- [39] M. J. DAY und W. G. PITCHFORD. *BJR Suppl.* **25**, 168–76 (1996).
- [40] J. E. BURNS. *BJR Suppl.* **25**, 177–82 (1996).
- [41] M. J. DAY und E. G. A. AIRD. *BJR Suppl.* **25**, 138–51 (1996).
- [42] J. M. JENSEN. *Z. Med. Phys.* **14**, 113–7 (2004).
- [43] O. A. SAUER und J. WILBERT. *Med. Phys.* **36 (12)**, 5444–5450 (2009).
- [44] CHRISTOPH KLEINSCHMIDT. *EGS-Ray*. Städtische Kliniken Köln–Merheim, Medizinische Physik, 1999.
- [45] A. DJOUGUELA, D. HARDER, R. KOLLHOFF, S. FOSCHEPOTH, W. KUNTH, A. RÜHMANN, K. WILLBORN und B. POPPE. *Phys. Med. Biol.* **54**, 2807–27 (2009).
- [46] I. GRADSTEIN und I. M. RYSHIK. *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*. Harri Deutsch Verlag, Thun, 1. Auflage, 1981.
- [47] H. KRIEGER. *Strahlungsquellen für Technik und Medizin*. Teubner, Stuttgart, 1. Auflage, 2005.
- [48] H. K. LOOE, T. S. STELLJES, D. HARDER und B. POPPE. The Gaussian line spread functions of single and array-type ionization chambers. Abstractband 43. Jahrestagung der DGMP, 2012.
- [49] H. K. LOOE. Deconvolutions and resolution corrections in clinical radiation dosimetry. Inaugural-Dissertation Univ. Oldenburg, 2011.
- [50] DIN 6809-8:2019-02 – Dosimetrie kleiner Photonen-Bestrahlungsfelder, 2019.
- [51] A. D. POLYANIN und A. V. MANZHIROV. *Handbook of Integral Equations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2. Auflage, 2008.
- [52] VARIAN MEDICAL SYSTEMS. C-Series Clinac™ – Enhanced Dynamic Wedge™ Implementation Guide, 2002. P/N 1103580-02.
- [53] P. L. PETTI und R. L. SIDDON. *Phys. Med. Biol.* **30**, 985–91 (1985).
- [54] J. P. GIBBONS. *Med. Phys.* **25**, 1411 (1998).
- [55] V. Y. KUPERMAN. *Phys. Med. Biol.* **49**, 2841–51 (2004).
- [56] D. A. LOW, W. B. HARMS, S. MUTIC und J. A. PURDY. *Med. Phys.* **25**, 656–61 (1998).

- [57] TH. HERRMANN, M. BAUMANN und W. DÖRR. *Klinische Strahlenbiologie*. Elsevier, München, 4. Auflage, 2006.
- [58] CH. WEISS. *Basiswissen medizinische Statistik*. Springer, Heidelberg, 3. Auflage, 2005.
- [59] SARS-CoV-2 Rapid Antigentest, Packungsbeilage. Materialnummer 09327592190.